ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 8 | August 1928 | Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie der Querruder.

Von **A. BETZ** und **E. PETERSOHN** in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Bei dem Versuch, die Wirkung von Querrudern (Verwindungsklappen) theoretisch zu behandeln, ergibt sich eine Schwierigkeit dadurch, daß die Querruder an irgend einer Stelle des Flügels unstetig beginnen. Da eine Verstellung des Querruders an einem Profil ebenso wirkt, wie eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Anstellwinkels, verhält sich ein Flügel mit betätigtem Querruder so wie ein Flügel mit unstetig veränderlichem Anstellwinkel. Durch die Tragflügeltheorie ist aber bekannt, daß sich der Auftrieb an einer solchen Stelle mit unstetiger Anstellwinkeländerung sicher nicht unstetig ändert. Es tritt daher die Frage auf, wie der Uebergang der Auftriebsverteilung an einer solchen Stelle verläuft, da ja die Wirkung des Querruders, nämlich das erzeugte Moment um die Längsachse, wesentlich von dieser Verteilung abhängt.

Um diese Frage der Auftriebsverteilung bei unstetiger Anstellwinkeländerung zunächst unabhängig von anderen Einflüssen, insbesondere denen der Flügelenden, zu klären, soll für die folgende theoretische Betrachtung ein Flügel von unendlicher Spannweite und konstanter Flügeltiefe, der an einer Stelle eine unstetige Anstellwinkeländerung aufweist, zugrunde gelegt werden [1]). Mit Rücksicht auf die mathematische Behandlung werden wir zunächst einen Flügel mit periodisch sich wiederholender unstetiger Anstellwinkeländerung

[1]) Die Anwendung der Ergebnisse auf Flügel mit endlicher Spannweite ist in dem Artikel: E. Petersohn, Theoretische und experimentelle Untersuchungen der unter Einwirkung von Querrudern an Tragflügeln auftretenden Momente, Luftfahrtforschung Bd. 2 Heft 2, behandelt.

Eine andere Bearbeitung erfuhr das Querruderproblem durch M. M. Munk (Report 191 des National Advisory Committee for Aeronautics, Washington 1924), wobei ein Flügel mit elliptischem Umriß zugrunde gelegt wurde.

Während des Druckes dieses Artikels erschien eine weitere Arbeit über diesen Gegenstand: C. Wieselsberger, Theoretische Untersuchungen über die Querruderwirkung beim Tragflügel (Report Nr. 30 of the aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University). Darin wird die Auftriebsverteilung über einen Flügel von endlicher Gliederzahl (es wurden 8 Glieder benützt) näherungsweise dargestellt.

behandeln (Abb. 1 oben). Am Schlusse können wir dann die Periode $\rightarrow \infty$ wachsen lassen und erhalten dann das gewünschte Ergebnis für einen unendlich langen Flügel mit einer einzigen Unstetigkeitsstelle. Die Behandlung des periodisch veränderlichen Flügels bietet den Vorteil, daß man die in Frage kommenden Funktionen in Fourierreihen darstellen kann, was gerade im vorliegenden Falle besonders einfache Zusammenhänge ergibt.

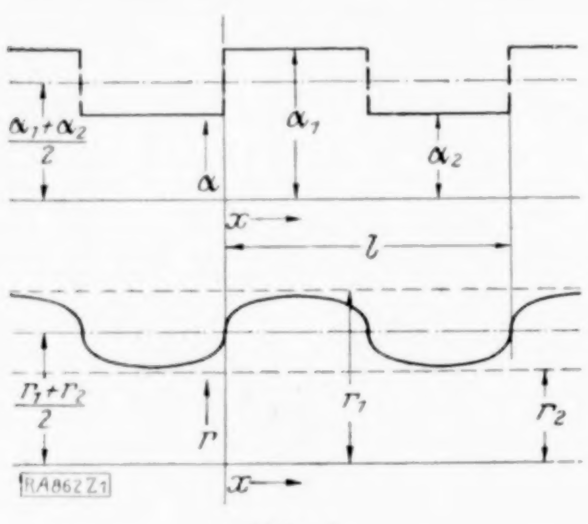


Abb. 1.

Wir wollen zur Darstellung der Auftriebsverteilung die Zirkulation Γ in Abhängigkeit von der Entfernung x von der Unstetigkeitsstelle suchen. Zwischen der Zirkulation Γ und dem Auftrieb pro Längeneinheit $\frac{dA}{dx}$ besteht bekanntlich die Beziehung

$$\frac{dA}{dx} = \varrho\, v\, \Gamma \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei ϱ die Luftdichte und v Fluggeschwindigkeit bedeuten. Demgemäß ist die Auftriebsziffer an der betreffenden Stelle

$$c_a = \frac{dA}{(\varrho/2)\, v^2 \cdot t \cdot dx} = \frac{2\,\Gamma}{v\,t} \quad \ldots \quad (2),$$

wobei t die Flügeltiefe bedeutet.

Die Auftriebsziffer eines Profiles in ungestörter (ebener) Strömung können wir mit hinreichender Genauigkeit in linearer Abhängigkeit vom Anstellwinkel α annehmen [1]):

$$c_a = c\,(\alpha - \alpha_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Dabei ist

$$c = \frac{d\,c_a}{d\,\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

eine dem Profil eigentümliche Konstante. (Für ebene Platten ist der theoretische Wert $c = 2\,\pi$, für dickere Profile ist der theoretische Wert etwas größer; die wirklichen Werte sind etwas kleiner als die theoretischen.)

Auf Grund der obigen Gl. (2) und (3) erhalten wir die Beziehung zwischen Γ und α

$$\Gamma = c\,\frac{v\,t}{2}\,(\alpha - \alpha_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

wobei α_0 der Anstellwinkel ist, bei dem $c_a = 0$ ist. An dem Flügel möge sich der Anstellwinkel unstetig von α_1 auf α_2 ändern (Abb. 1 oben). Die diesen Anstellwinkeln bei ungestörter Strömung (d. i. bei einem unendlich langen Flügel mit konstantem Anstellwinkel) entsprechenden Zirkulationen sind dann

$$\Gamma_1 = c\,\frac{v\,t}{2}\,(\alpha_1 - \alpha_0) \quad \ldots \quad (6) \qquad \text{und} \qquad \Gamma_2 = c\,\frac{v\,t}{2}\,(\alpha_2 - \alpha_0) \quad \ldots \quad (7).$$

An der Unstetigkeitsstelle wird aus Symmetriegründen eine mittlere Zirkulation $\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}$ herrschen. Von da aus wird sich die Zirkulation asymptotisch den Werten Γ_1 auf der einen und Γ_2 auf der anderen Seite nähern. Wir werden daher ansetzen können

$$\Gamma = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2}\,\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

wobei ε eine zunächst noch unbekannte Funktion von x ist. Unsere Aufgabe ist, die Funktion $\varepsilon(x)$ zu bestimmen.

Der Gang der Rechnung ist folgender: Wir entwickeln α in eine Fourierreihe und setzen Γ ebenfalls in Form einer Fourierreihe mit zunächst unbekannten Koeffizienten an. Aus dieser Verteilung von Γ kann man nach den bekannten Verfahren der Tragflügeltheorie die lotrechten Störungsgeschwindigkeiten w am Flügel berechnen, welche eine Aenderung des wirksamen Anstellwinkels um den Betrag

$$\Delta\,\alpha = -\frac{w}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

bewirken, so daß der wirksame Anstellwinkel

$$\alpha' = \alpha - \frac{w}{v}$$

---

[1]) Das trifft natürlich nicht mehr zu, wenn man sich dem Abreißpunkt nähert oder gar wenn die Strömung bereits abgerissen ist.

ist. Aus diesem wirksamen Anstellwinkel berechnet sich gemäß Gl. (5) die Zirkulation an jeder Stelle x des Flügels. Da alle Funktionen in Form von Fourierreihen dargestellt waren, so ergibt sich auch die so errechnete Zirkulationsverteilung in Form einer Fourierreihe. Durch Vergleich derselben mit der ursprünglich angenommenen Verteilung der Zirkulation lassen sich die noch unbestimmten Koeffizienten dieser Reihe ermitteln.

Die Reihe für den unstetig sich ändernden Anstellwinkel lautet (vergl. z. B. Hütte, 25. Aufl., I. Bd., S. 169):

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{2\pi x}{l} + \ldots\right) \quad (10).$$

Für die Verteilung von Γ setzen wir an

$$\Gamma = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \left(a_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin 3 \frac{2\pi x}{l} + a_5 \sin 5 \frac{2\pi x}{l} + \ldots\right) \quad (11).$$

Aus der Verteilung von Γ ergibt sich nach den bekannten Berechnungsverfahren der Tragflügeltheorie die Störungsgeschwindigkeit w an einer Stelle des Flügels im Abstand x_1 von der Unstetigkeitsstelle zu

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \cdot \frac{1}{x - x_1} \, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Aus dem Ansatz von Γ gemäß Gl. (11) ergibt sich[1]) hiernach

$$w = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \sum_0^\infty a_{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2l} (2n+1) \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots \quad (13).$$

Da diese Rechnung natürlich nicht nur für einen bestimmten Abstand, sondern für jeden beliebigen Abstand x_1 gilt, so können wir den Index 1 weglassen, und Gl. (13) stellt dann allgemein die Abhängigkeit der Störungsgeschwindigkeit w vom Abstand x von der Unstetigkeitsstelle dar.

Nunmehr können wir den wirksamen Anstellwinkel $\alpha' = \alpha - w/v$ als Funktion von x anschreiben und daraus die Zirkulation Γ berechnen:

$$\Gamma = c \frac{v\,t}{2} \left(\alpha - \alpha_0 - \frac{w}{v}\right) = c \frac{v\,t}{2} \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \alpha_0 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l}\right]$$
$$- c \frac{t}{2} \cdot \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \sum_0^\infty a_{(2n+1)} \frac{\pi}{2l} (2n+1) \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Berücksichtigt man, daß gemäß Gl. (6) und (7)

$$c \frac{v\,t}{2} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \alpha_0\right) = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \quad \text{und} \quad c \frac{v\,t}{2} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2}$$

ist, so ergibt sich durch Vergleich der letzten Gleichung mit der ursprünglichen Gleichung für Γ [Gl. (11)] folgende Beziehung

$$\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \sum_0^\infty a_{(2n+1)} \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l}$$
$$= \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \sum_0^\infty \left[\frac{4}{\pi (2n+1)} - \frac{c\,t}{2} a_{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2l} (2n+1)\right] \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots \quad (15).$$

Da die Koeffizienten entsprechender Glieder der beiden Fourierreihen gleich sein müssen, erhalten wir für die Koeffizienten $a_{(2n+1)}$ des ursprünglichen Ansatzes für Γ die Beziehung

$$a_{(2n+1)} = \frac{4}{\pi (2n+1)} - \frac{c\,t\,\pi}{4l} a_{(2n+1)} \cdot (2n+1), \quad a_{(2n+1)} = \frac{4}{\pi (2n+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c\,t\,\pi}{4l} (2n+1)} \quad (16).$$

Wir erhalten daher für die gesuchte Funktion ε in Gl. (8)

$$\varepsilon = \sum_0^\infty \frac{4}{\pi (2n+1) \left[1 + \frac{c\,t\,\pi}{4l} (2n+1)\right]} \sin (2n+1) \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie 1. Mitteilung. Nachr. der K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918. Neudruck in Prandtl-Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927 (Auslieferung durch J. Springer, Berlin). Unter Nr. 14 ist dort gezeigt, daß eine Zirkulationsverteilung $\Gamma = \bar{\Gamma} \cos \mu x$ eine Störungsgeschwindigkeit $w = \frac{\mu}{4} \bar{\Gamma} \cos \mu x = \frac{\mu}{4} \Gamma$ ergibt.

Damit haben wir die Aufgabe für periodisch abwechselnde Aenderung der Anstellwinkel gelöst. Um dieses Ergebnis für den Fall einer einzigen Unstetigkeitsstelle umzuformen, müssen wir noch die Periode $l \to \infty$ wachsen lassen. Für sehr große Werte von l und kleine Werte von x nähern sich in obiger Reihe alle Glieder mit niedrigem n gegen Null. Für große n kann man aber, da n und $n+1$ nur wenig verschieden sind, die Σ durch ein Integral ersetzen, indem man anstatt der ganzen Zahlen n eine stetig sich ändernde Größe λ einführt, so daß $2n+1 = 2\lambda$ wird. Die Reihe [Gl. (17)] geht dann über in

$$\varepsilon = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 2\lambda\mu}{2\lambda(1+2\nu\lambda)} d\lambda \quad (18),$$

wobei zur Abkürzung

$$\mu = \frac{2\pi x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und

$$\nu = \frac{c t \pi}{4 l} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gesetzt ist. Dieses Integral läßt sich auf die bekannten Funktionen [1]) Integralsinus

$$Si\,\xi = \int_0^\xi \frac{\sin z}{z} dz \quad . \quad (21)$$

und Integralcosinus

$$Ci\,\xi = \int_\xi^\infty \frac{\cos z}{z} dz \quad . \quad (22)$$

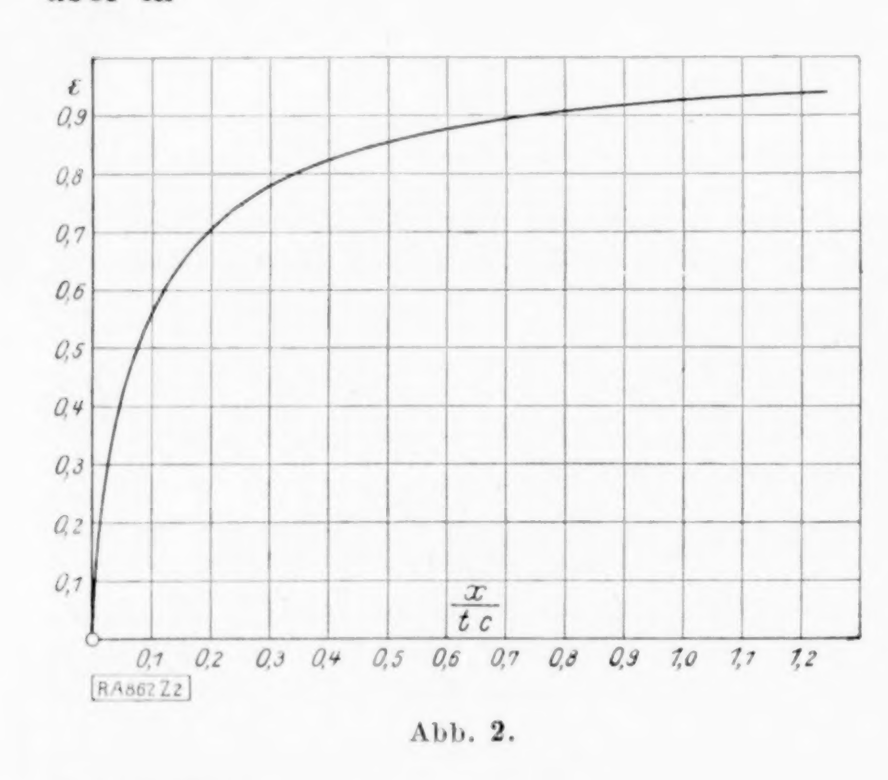


Abb. 2.

zurückführen.

Durch Partialbruchzerlegung läßt sich nämlich das Integral der Gl. (18) umformen in

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\lambda\mu}{2\lambda(1+2\nu\lambda)} d\lambda = \int_0^\infty \frac{\sin 2\lambda\mu}{2\lambda} d\lambda - \int_0^\infty \frac{\nu \sin 2\lambda\mu}{1+2\nu\lambda} d\lambda.$$

Das erste dieser beiden Integrale rechts wird durch Einsetzen von $2\lambda\mu = z$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \pm \frac{\pi}{4} \;{}^{2)},$$

das zweite wird durch Einsetzen von $\frac{\mu}{\nu}(1+2\nu\lambda) = y$

$$\frac{1}{2}\int_{\mu/\nu}^\infty \left(\cos\frac{\mu}{\nu}\sin y - \sin\frac{\mu}{\nu}\cos y\right)\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\cos\frac{\mu}{\nu}\left(\pm\frac{\pi}{2} - Si\,\frac{\mu}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\sin\frac{\mu}{\nu}\,Ci\,\frac{\mu}{\nu} \;{}^{2)}.$$

Demnach erhalten wir, wenn wir noch $\frac{\mu}{\nu} = \frac{8x}{ct}$ [Gl. (19) und (20)] einsetzen

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi}\left[\pm\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}\cos\frac{8x}{ct} + \cos\frac{8x}{ct}\,Si\,\frac{8x}{ct} - \sin\frac{8x}{ct}\,Ci\,\frac{8x}{ct}\right]$$
$$= \left(\pm 1 - \frac{2}{\pi}\sin\frac{8x}{ct}\,Ci\,\frac{8x}{ct}\right) - \cos\frac{8x}{ct}\left(\pm 1 - \frac{2}{\pi}\,Si\,\frac{8x}{ct}\right).$$

Der Verlauf der Funktion ε für positive x ist in Abb. 2 dargestellt. Für negative x ergibt sich die gleiche Kurve nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für große Werte von x läßt sich die Funktion $\varepsilon(x)$ durch die halbkonvergente Reihe [3])

$$\varepsilon = \pm 1 - \frac{2}{\pi z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \ldots\right)$$

[1]) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig B. G. Teubner 1923.

[2]) Das positive Vorzeichen gilt für positive μ bzw. x, das negative Vorzeichen für negative μ bzw. x.

[3]) Die Reihe ist nur soweit zu verwenden, als die Glieder abnehmen.

darstellen, wobei zur Abkürzung $z = \frac{8x}{ct}$ gesetzt ist. Für kleine Werte von x wird die Funktion durch den Ausdruck

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi}(1 - C - \ln z)\,z$$

wiedergegeben (für $z \ll 1$), wobei C die Eulersche Konstante $= 0,577$ bedeutet. 862

Beitrag zur Theorie der Kreiselpumpen.

Von **JOSEPH LICHTENSTEIN** in Elizabeth, N. J.[1]).

Bei der Berechnung von Zentrifugalpumpen benutzt die Praxis wohl allgemein noch die klassische eindimensionale Theorie, die eine reibungslose wirbelfreie Flüssigkeit voraussetzt, welche durch ein Schaufelrad mit unendlich vielen Schaufeln hindurchfließt. Es ist klar, daß die Voraussagen dieser Theorie mit der Wirklichkeit nicht gut übereinstimmen können, wo wir eine mit Reibung und Wirbeln behaftete Flüssigkeit haben, die durch ein Rad mit einer sehr geringen Zahl von Schaufeln fließt. Gewiß sind Theorien vorhanden, die sich mehr der wirklichen Konstruktion der Pumpe anpassen. Prof. Lorenz hat eine zweidimensionale Theorie entwickelt (Neue Theorie und Berechnung der Schaufelräder) und Prof. Prášil eine dreidimensionale Theorie (Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen. Schweizerische Bauzeitung 1923). Und doch dürften bei der Berechnung von Zentrifugalpumpen diese Theorien keine große Rolle spielen. Nicht nur, weil sie komplizierter sind. Aber auch sie haben eine wirbelfreie reibungslose Flüssigkeit zur Voraussetzung, so daß auch deren Resultate mit der Erfahrung nicht ganz übereinstimmen können. Dazu kommt noch, daß diese Theorien spezielle Laufradprofile voraussetzen und so den Konstrukteur in seinen Entwürfen außerordentlich einschränken. Es scheint also besser, die so einfache und in ihrem Wesen ganz allgemeine eindimensionale Theorie beizubehalten, die in der Hauptsache doch ganz korrekt den Verlauf der Gesetze beschreibt, durch die die Kreiselpumpen beherrscht werden. Nur werden wir ihre numerischen Resultate korrigieren müssen durch Faktoren, welche Theorie und Praxis in Uebereinstimmung zu bringen haben werden. Diese Faktoren können wir natürlich nur durch den Versuch bestimmen. Aber eine direkte Messung ist wohl im allgemeinen sehr schwierig, auch wenn dem Pumpeningenieur in seinem Versuchslokale eine bessere Ausrüstung an Meßinstrumenten zur Verfügung stehen würde, als üblicherweise der Fall ist. Und so müssen wir zu indirekten Methoden greifen und vor allem dasjenige Versuchsmaterial heranziehen, das der Pumpenbau in so großem Maße besitzt, und dies sind die üblichen Drosselkurven und Leistungskurven der ausgeführten und durchprobierten Maschinen.

1. Die Korrekturfaktoren. Zwei Werte können immer in Uebereinstimmung gebracht werden, wenn wir den einen mit einem numerischen Faktor multiplizieren. Wir wollen jedoch, daß unsere Faktoren mehr sind als bloße numerische Zahlen. Wir wollen, daß diese Faktoren physikalische Realitäten darstellen, die die wirklichen Gründe ausdrücken für die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung. Nur dann können wir erwarten, daß diese Faktoren unabhängig sein werden von der speziellen Konstruktion oder Größe der versuchten Pumpe. In unserer Studie wollen wir die folgenden Korrektionsfaktoren einführen:

1. Der hydraulische Wirkungsgrad. Das Verhältnis zwischen der effektiven Druckhöhe und der total erzeugten Druckhöhe des Schaufelrades. Soll dieser hydraulische Wirkungsgrad wirklich eine physikalische Realität sein, wie wir es wünschen, dann ist es notwendig, daß unsere Theorie die total erzeugte Druckhöhe der wirklichen Pumpe angibt. Nun wissen wir aber, daß die Gleichung der totalen Druckhöhe in der eindimensionalen Theorie eine weit größere Höhe angibt, als die wirkliche Pumpe erzeugt. Wir werden also die klassische Theorie umändern müssen und in ihr diejenigen physikalischen Faktoren einführen, die die Ursache für die kleinere Leistung der wirklichen Pumpe sind. Als solche führen wir die folgenden zwei Größen ein.

2. Der effektive Winkel, mit dem das Wasser die Schaufel verläßt. Wir wissen aus der Erfahrung, daß im Laufrade das Wasser die Schaufeln nicht tangential

[1]) Vortrag, gehalten auf der Jahresversammlung des Vereins Amerikanischer Ingenieure in New-York, 5. bis 8. Dezember 1927.

verläßt, wie es die klassische Theorie voraussetzt, sondern immer unter einem Winkel, der kleiner ist als der Schaufelwinkel. Wir wollen hier nicht die wahrscheinlichen Gründe für diese Tatsache diskutieren. Welches auch die Ursachen sein mögen, so müssen wir diese Tatsache doch in Berücksichtigung ziehen. Sie ist eine der Hauptursachen für die Abweichung zwischen Theorie und Praxis, und die Kenntnis des wirklichen Wasserwinkels für jeden gegebenen Schaufelwinkel ist von größter Bedeutung für den Pumpenkonstrukteur. Es wird die Aufgabe unserer Analyse sein, diesen effektiven Wasserwinkel aus den Versuchskurven abzuleiten.

3. Die Wirbelkomponente am Austritt des Rades. Dies ist der physikalische Faktor, der die endliche Schaufelzahl des wirklichen Rades berücksichtigt gegenüber der unendlich großen Schaufelzahl, wie sie die klassische Theorie voraussetzt. Der Einfluß der endlichen Schaufelzahl zeigt sich in einer Verringerung der total erzeugten Druckhöhe. Es soll hier nicht die Aufgabe sein, die Wirbelbewegung des Wassers innerhalb des Rades abzuleiten oder zu erklären[1]).

Kurz definiert ist die Wirbelkomponente die in tangentialer Richtung vorhandene Komponente der Wirbelbewegung am Austritt des Rades. Sie ist immer entgegengesetzt gerichtet zu der tangentialen Komponente der absoluten Austrittsgeschwindigkeit und wirkt deshalb verkleinernd auf die erzeugte Druckhöhe. Unsere Aufgabe wird es sein, diese Wirbelkomponente in die Gleichung für die totale Druckhöhe einzuführen und eine Methode zu finden, um aus einem vorliegenden Versuch die Größe der Wirbelkomponente abzuleiten. Wir wollen noch hinzufügen, daß bei Pfleiderer der Einfluß der endlichen Schaufelzahl viel zu groß erscheint, weil er die Differenz zwischen Schaufelwinkel und wirklichem Wasserwinkel nicht berücksichtigt. Er legt also die ganze Differenz zwischen theoretischer und wirklicher Pumpe in die Wirbelkomponente hinein. Als letzten Faktor für das Rad führen wir ein.

4. Die Rotationskomponente des Wassers am Eintritt. Die klassische Theorie vernachlässigt zwar diesen Faktor nicht, die Pumpenpraxis tut es jedoch zumeist, in dem sie einen senkrechten Eintritt voraussetzt, um auf diese Weise die Gleichungen zu vereinfachen. Da jedoch eine vorhandene Rotationskomponente die erzeugte totale Druckhöhe des Rades verringert, so dürfen wir sie nicht vernachlässigen. Eine solche Rotation des Wassers existiert wohl schon im Saugrohr der Pumpe und der Kontakt des Wassers mit den umlaufenden Teilen der Pumpe, wie Welle und Radnabe, dürfte sie noch vergrößern. Zumindest wollen wir die Eintrittsrotation in die Gleichungen einführen und die Analyse von gegebenen Versuchen wird zeigen, ob diese Rotation wirklich existiert und in welcher Größe.

Die bisher eingeführten Faktoren bestimmen das Laufrad vollständig. Aber eine Pumpe ist erst vollständig festgelegt durch ein zweites Element, das Spiralgehäuse, welches bestimmt, bei welcher Wassermenge und bei welchem Druck die Pumpe ihren höchsten hydraulischen Wirkungsgrad erreicht. Für gegebene Bedingungen von Wassermenge und Druck ist also das Spiralgehäuse theoretisch bestimmt und wir werden später zeigen, wie mathematisch Laufrad und Gehäuse miteinander verknüpft sind. Als letzten Korrektionsfaktor wollen wir nun einführen:

5. den Gehäusefaktor, der also die theoretische Berechnung des Gehäuses in Uebereinstimmung zu bringen haben wird mit der wirklichen Erfahrung. Die eigentliche Definition des Gehäusefaktors werden wir erst in den späteren Ableitungen geben.

Die so eingeführten fünf Faktoren sind erschöpfend. Ihre Kenntnis würde es ermöglichen, eine Pumpe mit dem höchsten Grad von Genauigkeit im voraus zu berechnen. Wir wollen nun daran gehen, die Gleichung der totalen Druckhöhe der klassischen eindimensionalen Theorie umzugestalten durch Einführung der bisher besprochenen Korrektionsfaktoren. Dazu werden folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$H =$ die vom Laufrade erzeugte totale Druckhöhe,
$h =$ die an der Pumpe wirklich gemessene Druckhöhe,
$u_1 =$ die Umfangsgeschwindigkeit am Eintritt,
$u_2 =$ die Umfangsgeschwindigkeit am Austritt,
$C_{u1} =$ die Projektion der abs. Eintrittsgeschwindigkeit auf u_1,

[1]) Dazu verweise ich auf die Literatur, speziell auf Kucharski: Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit, München und Berlin (1918) oder Strömungen im rotierenden Kanal, Z. f. d. ges. Turbinenwesen (1917) und C. Pfleiderer: Die Kreiselpumpen, Berlin, Julius Springer (1924), wo diese Gedanken eine spezielle Anwendung auf die Kreiselpumpen gefunden haben.

C_{u2} = die Projektion der abs. Austrittsgeschwindigkeit auf u_2,
C_{R1} = die radiale Komponente der abs. Eintrittsgeschwindigkeit,
C_{R2} = die radiale Komponente der abs. Austrittsgeschwindigkeit,
α = der Winkel zwischen abs. Geschwindigkeit und u,
β = der Winkel zwischen relativer Geschwindigkeit und u,
γ = das spezifische Gewicht der Flüssigkeit,
g = die Erdbeschleunigung.

2. Die Gleichung der totalen Druckhöhe. In der klassischen Theorie und mit den eingeführten Abkürzungen lautet diese Gleichung

$$H = \frac{1}{g}(u_2 C_{u2} - u_1 C_{u1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

und graphisch stellen wir diese Gleichung dar durch die sog. Eintritts- und Austrittsdiagramme Abb. 1 und 2. Gewöhnlich nimmt die Praxis einen senkrechten Eintritt an, also setzt

$$\alpha_1 = 90^0 \quad \text{oder} \quad C_{u1} = 0,$$

und aus Abb. 2 wird abgeleitet

$$\frac{C_{R2}}{u_2 - C_{u2}} = \operatorname{tg} \beta_2 \quad \text{oder} \quad C_{u2} = u_2 \left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right)$$

und dies in Gl. (1) eingesetzt ergibt

$$H = \frac{u_2^2}{g}\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

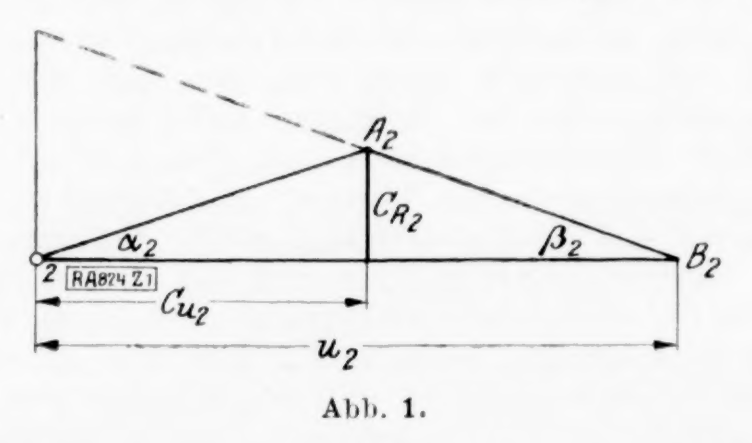


Abb. 1.

Abb. 2.

Für ein konstantes u_2 zeigt Gl. (1), daß die totale Druckhöhe in Funktion von C_{R2} oder, was dasselbe ist, in Funktion der Wassermenge eine gerade Linie ist.

Annahme. Wir wollen nun die einzig wichtige Annahme dieser Studie einführen, nämlich daß auch in der wirklichen Pumpe die totale Druckhöhe in Funktion der Wassermenge eine gerade Linie sei, eine Annahme, zu der wir auf Grund von Versuchen und Erfahrungen im Kreiselpumpenbau sehr wohl berechtigt sind.

Und nun können wir daran gehen, die besprochenen Korrektionsfaktoren einzuführen. Abb. 3 stellt nun das neue Eintrittsdiagramm dar. $O_2 B_2 C_2$ ist das theoretische Dreieck, entsprechend einer ∞ großen Zahl von Schaufeln, und β_2 ist der Winkel, mit dem das Wasser die Schaufeln verläßt und nicht identisch mit dem Schaufelwinkel. $A_2 C_2 = u_W$ ist die Wirbelkomponente und $O_2 A_2 B_2$ ist das Austrittsdreieck der wirklichen Pumpe.

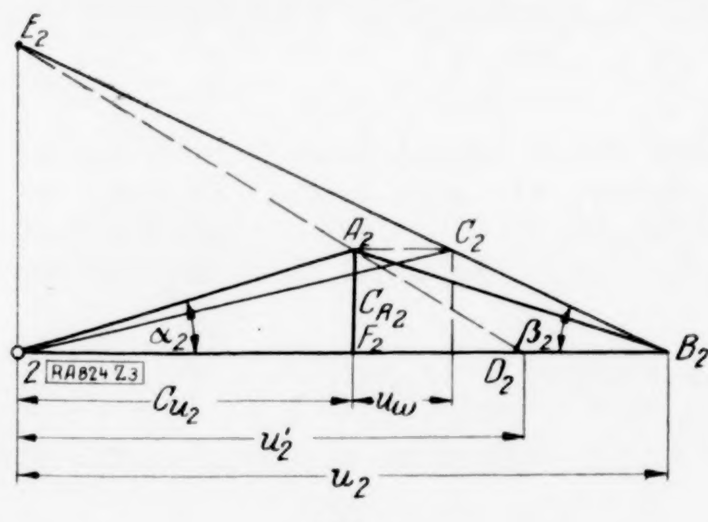


Abb. 3.

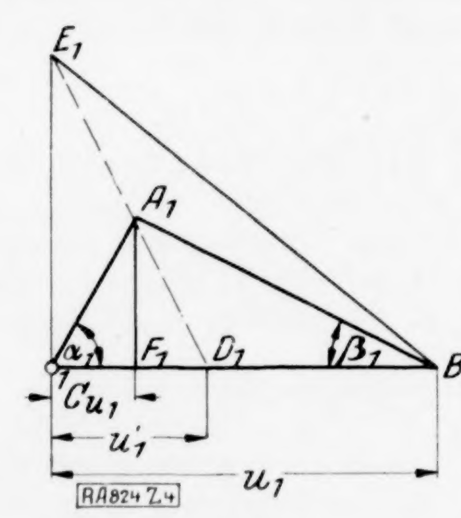


Abb. 4.

Wie man sieht, ist die resultierende relative Geschwindigkeit abgelenkt in entgegengesetzter Richtung zur Umfangsgeschwindigkeit gegenüber der unter dem Winkel β_2 austretenden Durchflußströmung. Die Wirbelkomponente verkleinert die Umfangskomponente der abs. Geschwindigkeit. Die Punkte A_2 und C_2 liegen auf einer Parallelen zu u_2, weil durch den Wirbel die Wassermenge und somit auch C_{R2} nicht beeinflußt wird.

In Abb. 4 ist $O_1 A_1 B_1$ das neue Eintrittsdiagramm, wobei also die abs. Eintrittsgeschwindigkeit einen beliebigen Winkel α_1 mit der Umfangsgeschwindigkeit bilden kann.

Als Ausgangsgleichung für die totale Druckhöhe der wirklichen Pumpe bleibt:

$$H = \frac{1}{g}(u_2 C_{u2} - u_1 C_{u1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wobei aber C_{u2} diesmal die gegenüber der theoretischen um u_W verkleinerte Umfangskomponente der abs. Austrittsgeschwindigkeit des wirklichen Rades bedeutet. Auf Grund der Annahme, die wir gemacht haben, muß nun für die wirkliche Pumpe Gl. (1) eine lineare Funktion von C_R darstellen. Dies wird der Fall sein, wenn die Punkte A_1 und A_2 des Eintritts- und Austrittsdiagrammes gerade Linien beschreiben, während wir C_R variieren; denn dann wird C_{R1} eine lineare Funktion von C_{u1} und C_{R2} eine lineare Funktion von C_{u2} sein, und die Verbindung beider durch Gl. (1), eine lineare Funktion selbst, wird linear bleiben. Diese Bedingung, daß A_1 und A_2 gerade Linien beschreiben, ist sicherlich genügend, denn es wäre doch nicht möglich vorauszusetzen, daß A_1 und A_2 gerade solche symmetrische Kurven zu einer Geraden beschreiben, daß die Summe der Gl. (1) eine gerade Funktion würde.

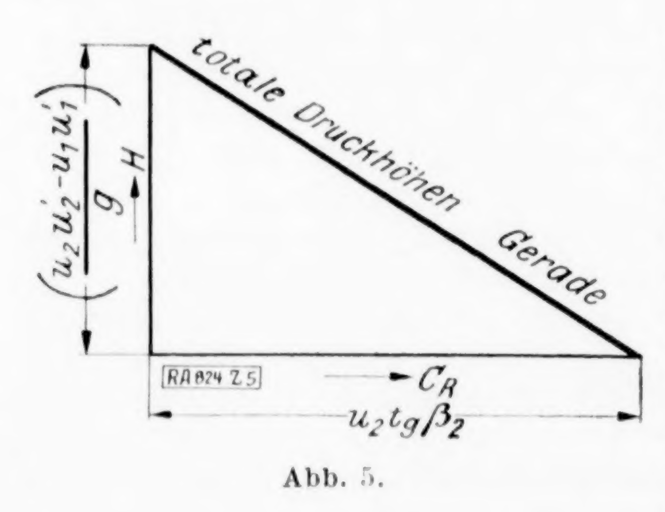


Abb. 5.

Einen Punkt der von A_1 und A_2 beschriebenen Geraden erhält man, wenn man den Grenzzustand der Charakteristik betrachtet, an der die totale Druckhöhe Null ist. In diesem Falle haben wir eine radiale Durchflußströmung ohne Energieübertragung der Schaufeln an das Wasser. C_{u1} und C_{u2} müssen deshalb Null sein und ebenso die Wirbelkomponente am Austritt. Daraus folgt, daß für diesen Zustand $O_2 E_2 B_2$ das Austrittsdiagramm und $O_1 E_1 B_1$ das Eintrittsdiagramm sein muß. Die von A_1 und A_2 beschriebenen Geraden müssen also die Ordinatenachsen in E_1 und E_2 schneiden. Wir können nun in unserm Koordinatensystem die Gleichungen dieser Geraden aufstellen.

Im Austrittsdiagramm Abb. 3. Die von A_2 beschriebene Gerade, welche von E_2 ausgeht, schneidet die u_2-Achse in D_2. Setzen wir $O_2 D_2 = u_2'$, so können wir u_2' als die Unbekannte benutzen, welche die Wirbelkomponente charakterisiert. In der Tat, wenn wir u_2' kennen, dann kennen wir auch die eigentliche Wirbelkomponente u_W für jedes Diagramm. Aus den ähnlichen Dreiecken

$$O_2 E_2 D_2 \quad \text{und} \quad A_2 F_2 D_2$$

folgt

$$\frac{O_2 E_2}{C_{R2}} = \frac{u_2'}{u_2' - C_{u2}}$$

$O_2 E_2 = u_2 \operatorname{tg} \beta_2$ und deshalb

$$C_{u2} = u_2'\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Im Eintrittsdiagramm Abb. 4. Die von A_1 beschriebene Gerade, welche von E_1 ausgeht, schneidet die u_1-Achse in D_1. Setzen wir auch hier $O_1 D_1 = u_1'$, so können wir u_1' als die Unbekannte benutzen, welche die Eintrittsrotation charakterisiert. Wenn u_1' bekannt ist, so ist auch C_{u1} bekannt für jedes Diagramm. Aus den ähnlichen Dreiecken $O_1 E_1 D_1$ und $A_1 F_1 D_1$ folgt

$$\frac{O_1 E_1}{C_{R1}} = \frac{u_1'}{u_1' - C_{u1}} .$$

Die Radialgeschwindigkeiten am Ein- und Austrittsdiagramm sind miteinander verbunden durch die Kontinuitätsgleichung

$$C_{R1} F_1 = C_{R2} F_2 ,$$

wobei bedeutet F_1 die freie Eintrittsfläche des Rades, F_2 die freie Austrittsfläche des Rades

$$C_{R1} = C_{R2}\frac{F_2}{F_1}, \qquad O_1 E_1 = O_2 E_2 \frac{F_2}{F_1} = u_2 \operatorname{tg} \beta_2 \frac{F_2}{F_1}$$

und deshalb

$$\frac{u_2 \operatorname{tg} \beta_2 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)}{C_{R2} \cdot \left(\frac{F_2}{F_1}\right)} = \frac{u_1'}{u_1' - C_{u1}},$$

woraus folgt

$$C_{u1} = u_1'\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Setzen wir nun Gl. (2) und (3) in (1) ein, so erhalten wir die transformierte Gleichung der totalen Druckhöhe für die wirkliche Pumpe

$$H = \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Für $C_{R2} = 0, \quad H_0 = \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right).$ Für $H = 0, \quad C_{R2} = u_2 \operatorname{tg} \beta_2 .$

Bei der Analyse eines Versuches müssen u_2', u_1' und $\operatorname{tg} \beta_2$ als Unbekannt vorausgesetzt werden. Zu ihrer Bestimmung gehören weitere Bedingungen, die wir im folgenden ableiten wollen.

3. Der hydraulische Wirkungsgrad. Der hydraulische Wirkungsgrad ist das Verhältnis der gemessenen Druckhöhe der Pumpe und der vom Rade total erzeugten Druckhöhe H

$$\eta_h = \frac{h}{H}.$$

In einem gegebenen Versuch ist h eine gegebene Funktion C_R und H ist durch Gl. (4) bestimmt. Der hydraulische Wirkungsgrad ist also auch eine Funktion von C_R und hat sein Maximum, wenn

$$\frac{d\eta_h}{dC_R} = \frac{H \cdot \frac{dh}{dC_R} - h\frac{dH}{dC_R}}{H^2} = 0, \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{H} \cdot \frac{dH}{dC_R} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dC_R}.$$

$\frac{dH}{dC_R}$ ist die Tangente des Winkels, den die totale Druckhöhengerade mit der positiven C_R-Achse bildet (Abb. 6). $\frac{dh}{dC_R}$ ist die Tangente des Winkels, den die Tangente an die Drosselkurve am Punkte besten hydraulischen Wirkungsgrades mit der pos. C_R-Achse bildet. Deshalb folgt aus Abb. 7

$$\frac{dH}{dC_R} = -\operatorname{tg} \gamma' = -\frac{H}{AP'}, \quad \frac{dh}{dC_R} = -\operatorname{tg} \gamma = -\frac{h}{AP} \quad \text{und} \quad \frac{H}{H \cdot AP} = \frac{h}{h \cdot AP} \quad \text{oder} \quad AP = AP.$$

Die Tangente an der Drosselkurve am Punkte besten hydraulischen Wirkungsgrades schneidet die C_R-Achse in demselben Punkte wie die totale Druckhöhengerade, und für diesen Punkt ist $C_R = u_2 \operatorname{tg} \beta_2$.

Wenn wir durch irgend welche andere Bedingungen imstande sind, diesen gemeinsamen Schnittpunkt P zu bestimmen, so können wir von P aus die Tangente an die

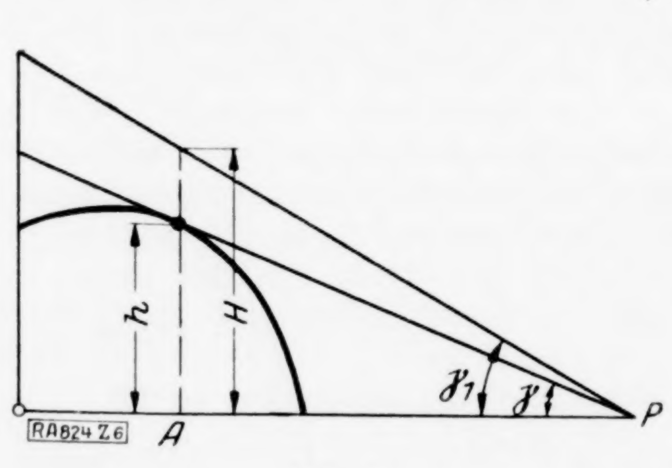


Abb. 6.

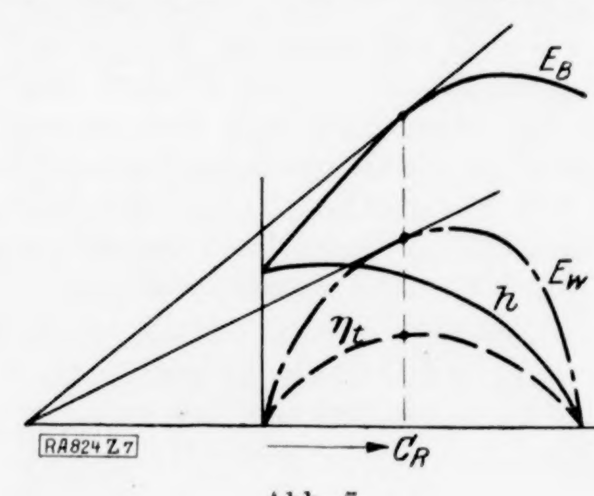


Abb. 7.

gegebene Drosselkurve ziehen und erhalten in deren Berührungspunkt den Punkt des höchsten hydraulischen Wirkungsgrades. Um nun solche andere Bedingungen zu finden, müssen wir die zweite Versuchskurve neben der Drosselkurve, die uns zur Verfügung steht, heranziehen, und das ist die Leistungskurve. Wir werden die aufgenommene Leistung vergleichen müssen mit der von den Schaufeln an das Wasser übertragenen totalen hydraulischen Energie, und zu diesem Zwecke müssen wir vorerst die Gleichung der totalen hydraulischen Energie entwickeln. Wir können noch vorher hinzufügen, daß bei der Berechnung einer neuen Pumpe, wo die Faktoren angenommen werden müssen, der Punkt P bekannt ist, ebenso der Punkt des besten hydraulischen Wirkungsgrades, für den die Pumpe berechnet wird, somit also die Tangente an die zu erwartende Drosselkurve. Ziehen wir aus der Erfahrung die Tatsache heran, daß die Drosselkurve der üblichen Kreiselpumpen sich durch eine Parabel ersetzen läßt und wählen wir auf Grund der Erfahrung noch den Druck bei geschlossenem Schieber, so haben wir genügend Bedingungen, um diese Parabel als die wahrscheinliche Drosselkurve der zu berechnenden Pumpe zu bestimmen.

Die totale hydraulische Energie. Multiplizieren wir in Gl. (4) die totale Druckhöhe mit der Wassermenge, so erhalten wir die Gleichung für die totale hydraulische Energie. Da wir diese Energie mit der aufgenommenen Leistung der Pumpe vergleichen wollen, die zumeist in PS ausgedrückt ist, so wollen wir auch die hydraulische Energie in PS ausdrücken. Bezeichnen wir diese totale hydraulische Energie mit E_t, so ist

$$E_t = C \cdot \gamma \cdot Q \cdot H,$$

wo C eine Konstante zur Umwandlung in PS, γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, Q die Wassermenge pro Zeiteinheit.

Es ist nun $Q = F_2 \cdot C_{R2}$, und H aus Gl. (4) liefert

$$E_t = C \cdot \gamma \cdot F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(C_R - \frac{C_R^2}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Gl. (5) zeigt, daß E_t in Funktion von C_R eine Parabel ist

$$E_t = 0, \quad \text{für} \quad C_R = 0 \quad \text{und für} \quad C_R = u_2 \operatorname{tg} \beta_2 .$$

Die Parabel schneidet also die C_R-Achse im selben Punkte wie die totale Druckhöhengerade, nämlich im charakteristischen Punkte P. Das Maximum der totalen hydraulischen Energie ist erreicht, wenn

$$\frac{d E_t}{d C_R} = 0 = C \cdot \gamma F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{2 C_R}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right),$$

woraus folgt, daß für das Maximum

$$C_R = \frac{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Das Maximum der totalen hydraulischen Energie ist erreicht bei einer Wassermenge, welche halb so groß ist wie die Wassermenge, bei der die totale Druckhöhe Null ist. Von dieser Tatsache werden wir später Gebrauch machen.

Vergleich zwischen Leistungskurve und totaler hydraulischer Energiekurve. Die Leistungskurve der Versuche stellt die von außen her in die Pumpe eingeführte Energie dar. Diese eingeführte Energie muß decken die totale hydraulische Energie und die äußeren mechanischen Reibungsverluste, wie die Radseitenreibung, die Reibung in Stopfbüchse und Lagern. Für den Moment wollen wir den Spaltverlust außer acht lassen. Dieser Spaltverlust ist bei den Kreiselpumpen doch sehr gering. Im ersten Versuch der Analyse können wir diesen Spaltverlust nicht berücksichtigen, da wir die Diagramme noch nicht kennen und so nicht imstande sind, den statischen Druck am Austritt aus dem Laufrade festzulegen, der ja den Spaltverlust bestimmt. Wir müssen also zunächst die Diagramme ohne Berücksichtigung des Spaltverlustes bestimmen und daraus den Spaltverlust berechnen und in einer zweiten Annäherung die Analyse nochmals durchführen unter Berücksichtigung des Spaltverlustes.

Mit folgenden Bezeichnungen:

E_B = die in die Pumpe eingeführte Energie in PS,
E_t = die totale hydraulische Energie in PS,
E_R = die Summe der äußeren mechanischen Reibungsverluste in PS

folgt, daß

$$E_B = E_t + E_R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

E_B ist eine Funktion von C_R, die durch den Versuch gegeben ist; E_t ist eine Funktion von C_R, die durch Gl. (5) bestimmt ist; E_R ist eine Konstante und von C_R unabhängig.

Die äußeren mechanischen Reibungsverluste sind nur von der Tourenzahl abhängig, die bei unserm Versuch konstant ist. Sie können natürlich nicht von der von der Pumpe geförderten Wassermenge irgendwie abhängen. Differenzieren wir nun Gl. (7), so erhalten wir

$$\frac{d E_B}{d C_R} = \frac{d E_t}{d C_R} \qquad (8)$$

und aus Gl. (8) folgt:

Die Tangente an die Leistungskurve und die Tangente an die totale hydraulische Energie-Parabel für irgend eine beliebige Wassermenge sind parallel. Gl. (8) ist nur gültig für ein Gebiet der Leistungskurve, welches um die Punkte besten hydraulischen und totalen Wirkungsgrades liegt. Wir wissen, daß bei kleinen Wassermengen sekundäre Strömungen im Rad auftreten, welche Energie verbrauchen, deren Größe von C_R nicht unabhängig ist. In Gl. (7) tritt deshalb ein von C_R abhängiges Glied ein und die Gl. (8) verliert so ihren Wert. Wir wollen hier gleich hinzufügen, daß, wenn wir die totale hydraulische Energie-Parabel gefunden haben, es uns auch möglich sein wird, dieses Gebiet der sekundären Strömungen abzugrenzen.

Der totale Wirkungsgrad. Der totale Wirkungsgrad ist eine durch Versuch bestimmte Größe und wird graphisch als Funktion der Wassermenge erhalten. Aber die genaue Lage seines Maximums ist manchmal nicht leicht zu bestimmen, da die Wirkungsgradkurven sehr flach verlaufen. Da es interessant ist, die genaue Lage des Maxismus zu kennen, so wird es nützlich sein, nach einer Methode zu suchen, um ihn genau zu bestimmen.

Nach Definition ist der totale Wirkungsgrad

$$\eta_t = \frac{C \cdot \gamma\, Q \cdot h}{E_B},$$

wo $C \cdot \gamma\, Q\, h$ die Energie bedeutet, die das Wasser tatsächlich beim Verlassen der Pumpe besitzt. Nennen wir diese Energie E_w, dann ist

$$\eta_t = \frac{E_W}{E_B}.$$

E_w ist eine gegebene Funktion der Wassermenge. Wir können diese Funktion graphisch erhalten durch punktweise Multiplikation der Wassermenge mit der Druckhöhe aus der Drosselkurve und die Energie in PS ausdrücken. E_B ist eine gegebene Funktion von C_R, die Leistungskurve. Für das Maximum von η_t haben wir deshalb

$$\frac{d \eta_t}{d C_R} = 0 = E_B \cdot \frac{d E_W}{d C_R} - E_W \cdot \frac{d E_B}{d C_R},$$

woraus

$$\frac{1}{E_B} \cdot \frac{d E_B}{d C_R} = \frac{1}{E_W} \cdot \frac{d E_W}{d C_R}.$$

Und ähnlich, wie wir es beim hydraulischen Wirkungsgrad bereits gefunden haben, folgt aus dieser Beziehung: Beim Punkte besten totalen Wirkungsgrades schneiden sich die Tangenten an der Leistungskurve und der Wasserenergiekurve in einem Punkte, der auf der C_R-Achse liegt. (Siehe Abb. 7.)

Wir haben nun genügend Bedingungen entwickelt, die uns nun ermöglichen, aus unseren Versuchskurven heraus die Parabel der totalen hydraulischen Energie und daraus auch die totale Druckhöhengerade zu bestimmen. Wir wollen diese Aufgabe in zwei Teile zerlegen.

4. Die Leistungskurve hat ein Maximum. Graphische Lösung. In diesem Falle und bezugnehmend auf Gl. (8) wissen wir, daß auch die Parabel der totalen hydraulischen Energie ihr Maximum bei derselben Wassermenge besitzt und daß diese Parabel die C_R-Achse bei der doppelten Wassermenge schneidet. Bezeichnen wir die Radialgeschwindigkeit am Punkte, wo die Leistungskurve ihr Maximum erreicht, mit C_{Rm}, dann liefert Gl. (6)

$$C_{Rm} = \frac{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}{2}$$

und

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2 \cdot C_{Rm}}{u_2} \qquad (9).$$

Gl. (9) **bestimmt also den wirklichen Winkel, mit dem das Wasser die Schaufeln verläßt.**

Die Kenntnis des charakteristischen Punktes P ermöglicht jetzt auch die Tangente an die gegebene Drosselkurve zu ziehen, und **der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Punkt des besten hydraulischen Wirkungsgrades.**

Von der Parabel der totalen hydraulischen Energie kennen wir nun die Sehne OP und das C_R ihres Maximums. Die Parabel wäre vollständig bestimmt, wenn wir noch eine andere Bedingung hinzufügten, und ausgehend von Gl. (8) können wir dazu die Richtung einer Tangente an einem anderen C_R wählen. Zu diesem Zwecke wählt man wohl am besten die Tangente $m - m$ der Leistungskurve am Punkte besten totalen oder hydraulischen Wirkungsgrades, zu welcher die entsprechende Tangente der Parabel beim selben C_R parallel läuft. Wir erinnern nun an folgende Sätze aus der analytischen Geometrie der Parabel (siehe Abb. 8 und 9).

1. Ein Durchmesser EQ der Parabel halbiert alle Sehnen OA, die parallel laufen zu der Tangente an ihrem Endpunkte E, so daß $OB = BA$ (siehe Abb. 8). Dieser Satz

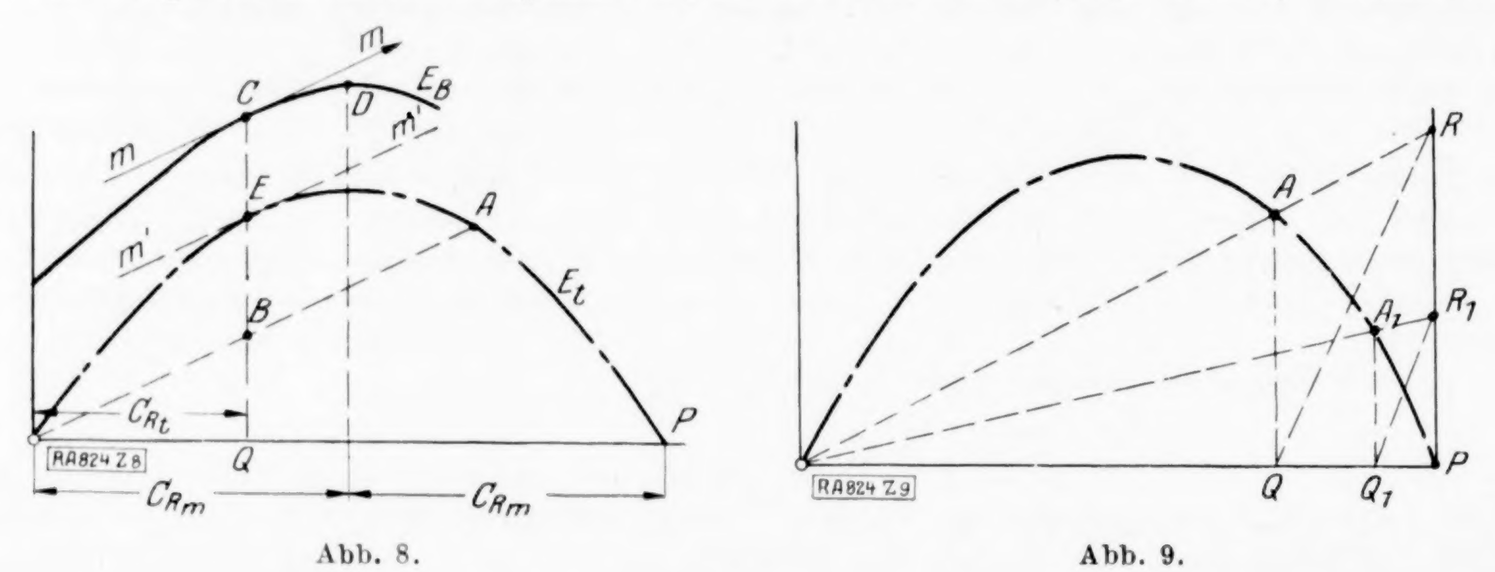


Abb. 8. Abb. 9.

erlaubt den Punkt A der Parabel zu erhalten, wenn wir OA parallel machen zu der gewählten Tangente der Leistungskurve und $OB = BA$.

2. Um weitere Punkte der Parabel zu erhalten, erinnern wir an die folgende Konstruktion (siehe Abb. 9). Gegeben eine Sehne OP der Parabel, normal zu deren Achse und ein Punkt A. Mache PR und AQ normal zu OP und zeichne OAR und QR. Zeichnen wir nun $A_1 Q_1$ normal zu OP und $Q_1 R_1$ parallel zu QR, dann schneidet die Linie OR_1 die Linie $A_1 Q_1$ in dem Punkte A_1 der Parabel.

Mit dieser Methode können wir jetzt die Parabel vollständig aufzeichnen und aus der Parabel leicht die totale Druckhöhenlinie erhalten durch Division eines E_t durch C_R und die oben angegebene Konstante. Indem wir an jedem Punkte die Verhältnisse zwischen der Höhe an der Drosselkurve und der totalen Druckhöhenlinie bilden, erhalten wir die Kurve der hydraulischen Wirkungsgrade und das Maximum an dem vorher bereits festgelegten Punkte. Die Differenz zwischen E_B und E_t am Punkte des besten totalen Wirkungsgrades z. B. liefert die äußeren mechanischen Reibungsverluste. Fügen wir diese Größe zu jedem Punkte der totalen hydraulischen Energie-Parabel hinzu, so erhalten wir eine Kurve, die um die Punkte besten hydraulischen und totalen Wirkungsgrades sich mit der Leistungskurve deckt, bei kleinen Wassermengen jedoch von ihr abweicht. Die Differenzen zwischen dieser Kurve und der Leistungskurve ergeben die Energiebeträge, die die sekundären Strömungen verbrauchen. Der Schnittpunkt der Druckhöhengerade mit der Ordinate liefert den Wert $\frac{1}{g}(u_2 u_2' - u_1 u_1')$.

Analytische Lösung. Anstatt graphisch kann man natürlich die totale hydraulische Energie Parabel auch analytisch bestimmen.

Bezeichnen wir die Radialgeschwindigkeiten am Punkte, wo die Leistungskurve ihr Maximum hat, mit C_{Rm} und am Punkte maximalen totalen Wirkungsgrades mit C_{Rt} und ziehen wir Gl. (5) der Parabel heran, dann hat man

$$E_t = C \cdot \gamma\, F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(C_R - \frac{C_R^2}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und

$$\frac{d\,E_t}{d\,C_R} = C \cdot \gamma\, F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{2\,C_R}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right).$$

Für $C_R = C_{Rm}$ ist $\frac{d\,E_t}{d\,C_R} = 0$, also $\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2\,C_{Rm}}{u_2}$. Für $C_R = C_{Rt}$ ist $\frac{d\,E_t}{d\,C_R} = \tau$,

wenn wir mit τ die Neigung der Tangente der Leistungskurve am Punkte besten totalen Wirkungsgrades bezeichnen

$$\tau = C \cdot \gamma\, F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{2 \cdot C_{Rt}}{u_2 \cdot \frac{2 \cdot C_{Rm}}{u_2}}\right), \quad \text{woraus} \quad (u_2 u_2' - u_1 u_1') = \frac{g \cdot \tau}{C \cdot \gamma F_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C_{Rt}}{C_{Rm}}}$$

und

$$E_t = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{C_{Rt}}{C_{Rm}}\right)}\left(C_R - \frac{C_R^2}{2 \cdot C_{Rm}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Gl. (10) bestimmt also die Parabel der totalen hydraulischen Energie, wenn C_{Rm}, C_{Rt} und τ durch den Versuch bekannt sind.

Aus Gl. (10) erhalten wir die Gleichung der Druckhöhengerade

$$H = \frac{E_t}{C \cdot \gamma\, F_2 \cdot C_R} = \frac{\tau}{C \cdot \gamma\, F_2 \left(1 - \frac{C_{Rt}}{C_{Rm}}\right)}\left(1 - \frac{C_R}{2 \cdot C_{Rm}}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

und für $C_R = 0$

$$\left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right) = \frac{\tau}{C \cdot \gamma\, F_2 \left(1 - \frac{C_{Rt}}{C_{Rm}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

5. Die Leistungskurve hat kein Maximum. Dieser Fall ist prinzipiell nicht verschieden vom vorhergehenden. Wir benutzten vorher die Kenntnis der Richtungen zweier Tangenten an die Parabel, und an Stelle der horizontalen Tangente werden wir jetzt außer der Tangente am Punkte besten totalen Wirkungsgrades eine andere Tangente benutzen, z. B. die Tangente am Punkte besten hydraulischen Wirkungsgrades. Sollten diese beiden Punkte zu nahe aneinander liegen, so kann man irgend einen anderen Punkt der Leistungskurve wählen, aber in dem Bereich, in dem sekundäre Strömungen mit Sicherheit nicht mehr vorhanden sind.

Graphische Lösung. Die Kenntnis der Richtungen zweier Tangenten der Parabel bestimmt zwei Punkte A_1, A_2 dieser Parabel, wie wir es vorher bereits gezeigt haben. Um den Schnittpunkt der Parabel mit der C_R Achse zu finden, kann man folgende Konstruktion benutzen:

Mache $Q_2 B_2 = Q_1 B_1$ und verbinde A_1 mit B_2, dann schneidet die Linie $A_1 B_2$ die C_R-Achse im gesuchten charakteristischen Punkt P. Damit ist nun dieses Problem auf das vorhergehende zurückgeführt (siehe Abb. 10).

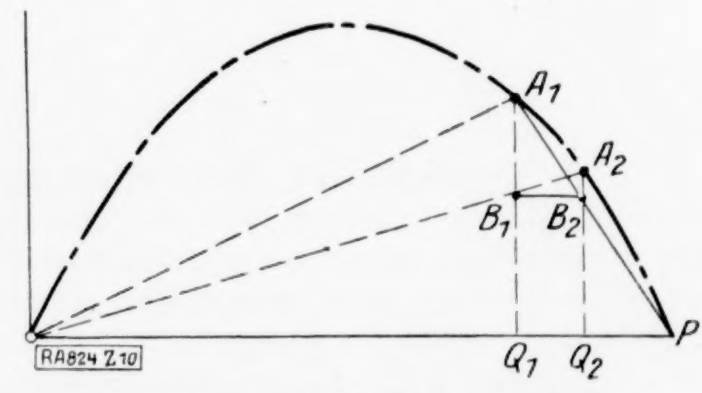


Abb. 10.

Analytische Lösung. Bezeichnen wir die Radialgeschwindigkeiten an den beiden Punkten der Leistungskurve, wo wir die Tangenten gewählt haben, mit C_{Rt} und C_{Rh} und mit τ_t und τ_h die Neigungen dieser Tangenten mit der positiven C_R Achse, dann haben wir folgende Bedingungen:

$$\text{für } C_R = C_{Rt} \text{ ist } \frac{d\,E_t}{d\,C_R} = \tau_t, \qquad \text{für } C_R = C_{Rh} \text{ ist } \frac{d\,E_t}{d\,C_R} = \tau_h$$

$$\tau_t = C \cdot \gamma\, F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{2 \cdot C_{Rt}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right), \qquad \tau_h = C \cdot \gamma\, F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right)\left(1 - \frac{2 \cdot C_{Rh}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right)$$

und

$$\left(\frac{\tau_t}{\tau_h}\right) = \frac{1 - \frac{2 \cdot C_{Rt}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}}{1 - \frac{2 \cdot C_{Rh}}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}},$$

woraus

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{2\left(c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h}\, c_{Rh}\right)}{\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right) u_2} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Gl. (13) bestimmt für diesen Fall den wirklichen Wasserwinkel

$$C \cdot \gamma F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right) = \frac{\tau_t}{1 - \frac{2 \cdot c_{Rt}}{u_2 \operatorname{tg}\beta_2}}$$

und hier aus Gl. (13) eingesetzt

$$C \cdot \gamma F_2 \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right) = \frac{\tau_t}{1 - \frac{c_{Rt}\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}}}.$$

Diesen Wert und den Wert von $\operatorname{tg}\beta_2$ aus Gl. (13) in die Gl. (5) eingesetzt, liefert jetzt die Gleichung der Parabel

$$E_t = \frac{\tau_t}{1 - \frac{c_{Rt}\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}}} \left(c_R - \frac{c_R^2\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{2\left(c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}\right)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Aus Gl. (14) erhält man jetzt die Gleichung der Druckhöhengerade

$$H = \frac{E_t}{C \cdot \gamma F_2 c_R} = \frac{\tau_t}{C \cdot \gamma F_2} \left(\frac{1}{1 - \frac{c_{Rt}\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}}}\right) \left(1 - \frac{c_R\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{2\left(c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}\right)}\right) \quad . \quad (15)$$

und für $c_R = 0$

$$\left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right) = \frac{\tau_t}{C \cdot \gamma F_2} \left(\frac{1}{1 - \frac{c_{Rt}\left(1 - \frac{\tau_t}{\tau_h}\right)}{c_{Rt} - \frac{\tau_t}{\tau_h} c_{Rh}}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

6. Bestimmung der Größen u_1' und u_2'. Aus der Analyse, wie wir sie soweit entwickelt haben, haben wir bis jetzt den Wert $u_2 u_2' - u_1 u_1'$ erhalten, jedoch noch nicht die Möglichkeit bekommen, beide Größen zu trennen. Dazu brauchen wir natürlich eine neue Bedingung, und wir wollen hierfür eine Annahme machen, die üblicherweise im Pumpenbau gemacht wird.

Annahme. Am Punkte besten totalen Wirkungsgrades tritt das Wasser tangential mit dem Winkel β_1 in die Schaufeln ein, also stoßlos. Der Winkel β_1 ist aus der gegebenen Konstruktion der Pumpe bekannt und die Kenntnis dieses Winkels bestimmt jetzt die Größe u_1'.

Gehen wir zum Eintrittsdiagramm zurück (siehe Abb. 4). β_1 ist bekannt und ebenso die Radialgeschwindigkeit am Eintritt für den Punkt besten totalen Wirkungsgrades c_{R1t}, also ist das Dreieck OA_1B_1 und c_{u1} bekannt. Aus der vorhergehenden Analyse bekannt ist auch OE_1

$$OE_1 = u_2 \operatorname{tg}\beta_2 \cdot \left(\frac{F_2}{F_1}\right),$$

verbinden wir also E_1 mit A_1, so erhalten wir D_1 und so u_1'. Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\frac{c_{R1t}}{u_2 \operatorname{tg}\beta_2 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)} = \frac{u_1' - c_{u1}}{u_1'} = \frac{u_1' - \left(u_1 - \frac{c_{R1t}}{\operatorname{tg}\beta_1}\right)}{u_1'}$$

$C_{R1t} = C_{Rt} \cdot \left(\frac{F_2}{F_1}\right)$, wo C_{Rt} die Radialgeschwindigkeit am Austritt bedeutet

$$u_1' = \frac{\left(u_1 - \frac{C_{Rt}\,F_2}{\operatorname{tg}\beta_1\,F_1}\right)}{\left(1 - \frac{C_{Rt}}{u_2\operatorname{tg}\beta_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Nachdem wir jetzt u_1' und $(u_2 u_2' - u_1 u_1')$ kennen, ist natürlich auch u_2' bekannt und damit das Austrittsdiagramm (siehe Abb. 3). Wir kennen aus der Analyse β_2, u_2' und C_{R2} die radiale Austrittsgeschwindigkeit am Punkte höchsten Wirkungsgrades, können also das Diagramm zeichnen und C_{u2} und die wirkliche Wirbelkomponente u_w bestimmen. Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$\frac{u_w}{u_2 - u_2'} = \frac{u_2\operatorname{tg}\beta_2 - C_{R2}}{u_2\operatorname{tg}\beta_2}, \qquad u_w = (u_2 - u_2')\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2\operatorname{tg}\beta_2}\right) \quad \ldots \quad (18),$$

und C_{u2} ist gegeben durch

$$C_{u2} = u_2 - \frac{C_{R2}}{\operatorname{tg}\beta_2} - u_w,$$

woraus

$$C_{u2} = u_2'\left(1 - \frac{C_{R2}}{u_2\operatorname{tg}\beta_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

In der Einleitung dieses Artikels habe ich mich bereits auf das Buch von C. Pfleiderer: Die Zentrifugalpumpen (Berlin 1924, Julius Springer) bezogen, wo folgende Formel für die Wirbelkomponente abgeleitet wird: $u_w = \psi\,\frac{g\,R_2^2\,H}{z \cdot S\,u_2}$.

Hier bedeutet:

ψ = eine dimensionslose Konstante,
Z = die Anzahl der Schaufeln,
R_2 = der Laufradius am Austritt,
S = das statische Moment der mittleren Stromlinie des Laufrades
$S = \int_{r_1}^{r_2} r\,dx$ (siehe Abb. 11).

Für $C_R = 0$ ist $H = \frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}$ und $u_w = u_2 - u_2'$,

also

$$\psi = \left(\frac{z \cdot S}{R_2^2}\right)\left(\frac{u_2 (u_2 - u_2')}{u_2 u_2' - u_1 u_1'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Gl. (20) ermöglicht also, die Konstante ψ aus unseren Versuchen eindeutig abzuleiten, und es wäre interessant, durch Analyse einer größeren Zahl Versuche festzustellen, ob ψ wirklich eine Konstante ist, die von der Konstruktion der Pumpe unabhängig ist.

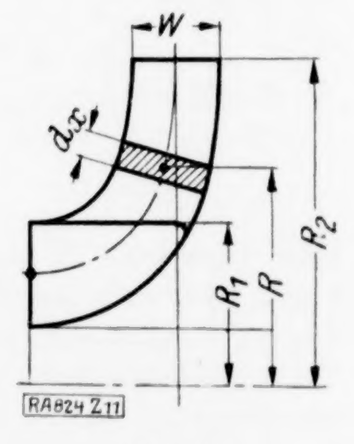


Abb. 11.

Wir haben nun die Analyse des Laufrades vollendet und könnten jetzt daran gehen, den Spaltverlust zu berücksichtigen, indem wir zunächst diesen Spaltverlust mit Hilfe der bekannten Diagramme berechnen würden. Aus der Theorie der Zentrifugalpumpe ist bekannt, daß die Spaltwassermenge mit der Wassermenge wie eine flachgestreckte Ellipse variiert. Wir könnten diese Ellipse bestimmen und daraus die Drosselkurve mit Berücksichtigung des Spaltverlustes ableiten und diese neue Drosselkurve zu einer zweiten Analyse benutzen. Wir wollen dies hier nicht durchführen, da keine neue Elemente zu behandeln wären. Jedoch möchte ich an dieser Stelle kurz ein Beispiel einer graphischen Analyse anführen.

7. Beispiel. Graphische Analyse einer 10″ Bethlehem-Zentrifugalpumpe, durchprobiert bei einer konstanten Tourenzahl von 1150 (siehe Abb. 12). Die Drosselkurve h, die Leistungskurve E_B und die totale Wirkungsgradkurve η_t sind durch den Versuch gegeben. Die Pumpe hat die folgenden Dimensionen:

Austrittsdurchmesser . . . . $D_2 = 0{,}42$ m,
Eintrittsdurchmesser . . . . $D_1 = 0{,}216$ m,
Austrittsfläche . . . . $F_2 = 0{,}0474$ m²,
Eintrittsfläche . . . . $F_1 = 0{,}0434$ m²,

Schaufel-Austrittswinkel . . . . $\beta_2' = 20^0$,
Schaufel-Eintrittswinkel . . . . $\beta_1 = 15^0$.

$$u_2 = \frac{\pi \cdot 0{,}42 \cdot 1150}{60} = 25{,}3 \text{ m/s}, \quad u_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}216 \cdot 1156}{60} = 13 \text{ m/s}.$$

Die Leistungskurve weist ein Maximum auf bei einer Wassermenge von 0,1575 m³/s. Die entsprechende radiale Austrittsgeschwindigkeit ist $C_{R2} = \frac{0{,}1575}{0{,}0474} = 3{,}325$ m/s.

Gl. (9) liefert nun den wirklichen Wasserwinkel

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2 \cdot 3{,}325}{25{,}3} = 0{,}263 .$$

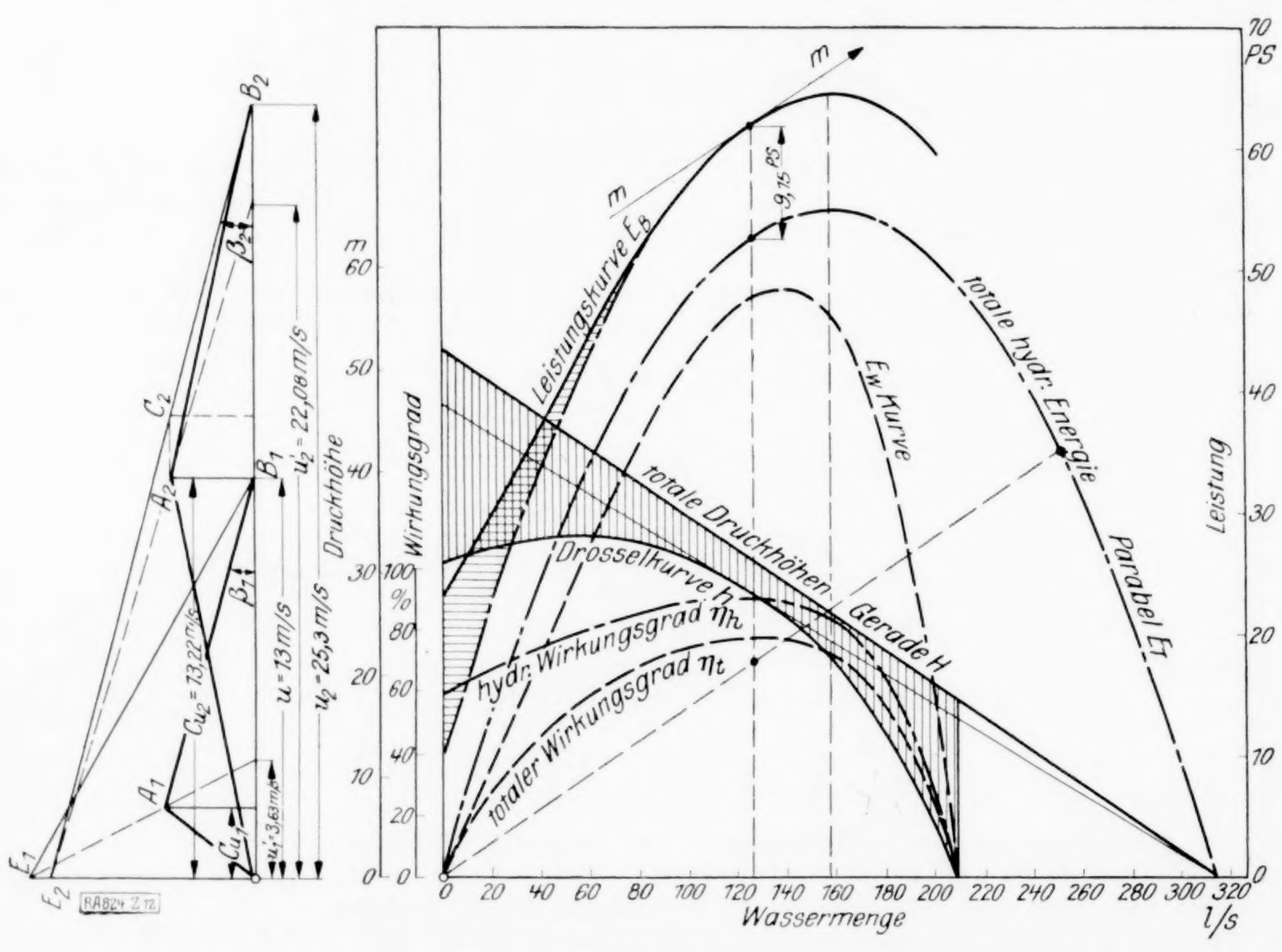


Abb. 12.

Der wirkliche Wasserwinkel ist also ungefähr $14^0\,45'$ gegen 20^0 Schaufelwinkel. Der beste hydraulische Wirkungsgrad ist der Berührungspunkt der Tangente an die Drosselkurve, ausgehend vom charakteristischen Punkt P. Dieser Berührungspunkt ist bei einer Wassermenge von 0,122 m³/s, während der beste totale Wirkungsgrad bei einer Wassermenge von 0,126 m³/s erreicht ist. Unter Zuhilfenahme der Tangente $m - m$ an die Leistungskurve am Punkte besten totalen Wirkungsgrades ist die totale hydraulische Energieparabel E_t gezeichnet worden nach den entwickelten Methoden. Die Differenz zwischen dieser Parabel und der Leistungskurve am Punkte besten totalen Wirkungsgrades beträgt 9,15 PS. Dieser Wert stellt also die Größe der äußeren mechanischen Reibungsverluste dar. Das horizontal gestrichene Feld zwischen der Parabel und der Leistungskurve gibt den Bereich der sekundären Strömungen im Laufrad an und die Größe der dazu benötigten Energie. Zur Bestimmung der totalen Druckhöhengerade genügt es, wenn ein Punkt dieser Geraden aus der Parabel abgeleitet wird: z. B. der Punkt des besten hydraulischen Wirkungsgrades. Hier ist $E_t = 51{,}8$ PS und deshalb $H = \frac{51{,}8 \cdot 75}{1000 \cdot 0{,}122} \cdot 31{,}8$ m. Die gemessene Höhe an diesem Punkt ist $h = 28{,}8$ m, so daß der höchste hydraulische Wirkungsgrad sich ergibt zu $\eta_h = \frac{28{,}8}{31{,}8} = 0{,}905$. Die Druckhöhen-

gerade schneidet die Ordinatenachse in einer Höhe von 51,95 m, so daß $\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g} = 51,95$ m.

Das vertikal gestrichene Feld zwischen der totalen Druckhöhengeraden und der Drosselkurve gibt die hydraulischen Verluste an und das Verhältnis beider in jedem Punkte liefert die hydraulische Wirkungsgradkurve η_h.

Der beste totale Wirkungsgrad tritt ein bei einer Wassermenge von 0,126 m³/s. Die entsprechenden Radialgeschwindigkeiten am Eintritt und Austritt sind:

$$C_{Rt} = \frac{0,126}{0,0474} = 2,66 \text{ m/s}, \qquad C_{R1t} = \frac{0,126}{0,0434} = 2,9 \text{ m/s}.$$

Zur Bestimmung von Ein- und Austrittsdiagrammen rechnen wir:

$$O E_2 = 25,3 \cdot 0,263 = 6,65 \text{ m/s}, \qquad O E_1 = 6,65 \cdot \frac{0,0474}{0,0434} = 7,26 \text{ m/s}.$$

Und Gl. (17) liefert jetzt den Wert von u_1'.

$$u_1' = \frac{13 - \frac{2,66 \cdot 0,0474}{0,2679 \cdot 0,0434}}{1 - \frac{2,66}{25,3 \cdot 0,263}} = 3,63 \text{ m/s}, \qquad u_2 = \frac{9,81 \cdot 51,95 + 3,63 \cdot 13}{25,3} = 22,08 \text{ m/s}.$$

Und die wirkliche Wirbelkomponente aus Gl. (18)

$$u_w = (25,3 - 22,08)\left(1 - \frac{2,66}{25,3 \cdot 0,263}\right) = 1,906 \text{ m/s}$$

und aus Gl. (19)

$$C_{u2} = 22,08\left(1 - \frac{2,66}{25,3 \cdot 0,263}\right) = 13,22 \text{ m/s}.$$

Mit diesen berechneten Werten kann man jetzt sowohl Ein- wie Austrittsdiagramme aufzeichnen (siehe Abb. 12).

Um die Konstante ψ aus Gl. (20) zu bestimmen, sei angegeben, daß die Schaufelzahl 9 ist und daß das statische Moment des mittleren Stromfadens $S = \int_{r_1}^{r_2} r\,dx = 0,0161$ m² beträgt. Dies eingesetzt liefert

$$\psi = \left(\frac{9 \cdot 0,0161}{0,0441}\right)\left(\frac{25,3\,(25,3 - 22,08)}{9,81 \cdot 51,95}\right) = 0,52.$$

Wir haben nun die Analyse des Laufrades selbst vollendet und müssen nun daran gehen das zweite Element der Zentrifugalpumpe, das Gehäuse, zu studieren und die Gleichung zu entwickeln, welche Gehäuse und Laufrad miteinander verknüpft.

8. Die Verbindung von Laufrad und Gehäuse. Für ein gegebenes Laufrad mit gegebenen Dimensionen ist für eine bestimmte Drehzahl dessen totale Druckhöhengerade bestimmt und sicherlich unabhängig von dem dieses Laufrad umgebenden Gehäuse. Wir brauchten deshalb bei der Ableitung der Gleichung der Druckhöhengeraden auf das Gehäuse keine Rücksicht zu nehmen. Wir haben auch früher schon gezeigt, daß die Drosselkurve einer Pumpe ihren höchsten hydraulischen Wirkungsgrad erreicht im Berührungspunkte der Geraden, die vom charakteristischen Punkt P aus gezogen wird (siehe Abb. 13). Diese Tangente PE an die Drosselkurve ist nun nichts anderes als eine Druckhöhengerade des Laufrades für einen **konstanten** hydraulischen Wirkungsgrad, der gleich dem Maximum ist. Irgend eine von P aus gezogene Gerade stellt eine Druckhöhengerade des Laufrades dar, für einen bestimmten konstanten hydraulischen Wirkungsgrad variierend von 1 bis 0. Solch eine Gerade muß die Drosselkurve in den zwei Punkten schneiden, wo die hydraulischen Wirkungsgrade mit dem konstanten Wert dieser Geraden übereinstimmen. Für den maximalen hydraulischen Wirkungsgrad

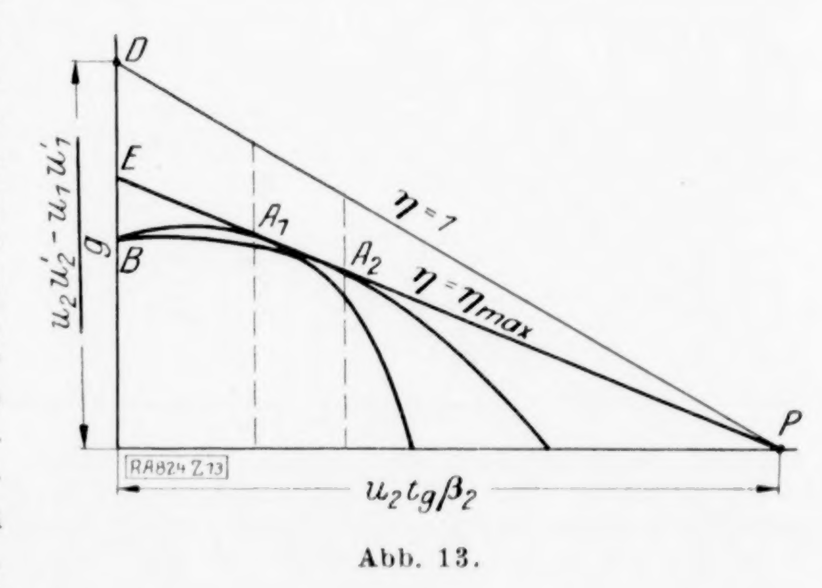


Abb. 13.

muß die entsprechende Gerade natürlich Tangente an die Drosselkurve sein, da es nur einen Punkt der wirklichen Drosselkurve gibt, dem dieser Wirkungsgrad entspricht.

Lassen wir ein gegebenes Laufrad bei derselben Drehzahl in verschieden große Gehäuse rotieren, so wissen wir aus der Erfahrung, daß die entstehenden Drosselkurven verschieden sind, und verschieden ist auch Wassermenge und Druck, bei dem der höchste hydraulische Wirkungsgrad erreicht wird. Was jedoch gleich bleibt ist die Größe dieses maximalen hydraulischen Wirkungsgrades, und zwar für einen großen Bereich verschiedener Gehäuse. Es folgt deshalb daraus, daß all diese verschiedenen Drosselkurven dieselbe Gerade als Tangente haben müssen, die sie jedoch in verschiedenen Punkten berührt. Eine Folgerung, welche die Erfahrung sehr gut bestätigt hat. Es ist also das Gehäuse, welches den Punkt der Druckhöhengeraden für maximalen hydraulischen Wirkungsgrad des Laufrades bestimmt, der die wirkliche Drosselkurve berühren wird. Es ist klar, daß für eine Pumpe das Gehäuse von großer Bedeutung ist und daß für ein gegebenes Laufrad verschiedene Gehäuse sehr verschiedene Formen von Drosselkurven erzeugen können. Es ist deshalb notwendig, die Gleichungen zu entwickeln, die für ein gegebenes Laufrad und für ein gegebenes Gehäuse festlegen, bei welcher Wassermenge und bei welchem Druck der höchste hydraulische Wirkungsgrad erreicht sein wird.

Ein gegebenes Laufrad, das mit einer bestimmten Drehzahl rotiert, legt im Austrittsdiagramm fest die Größen u_2, u_2' und β_2. Das Austrittsdiagramm für den Punkt besten hydraulischen Wirkungsgrades wäre vollständig bestimmt, wenn wir noch den Winkel α_2 kennen würden, den die abs. Geschwindigkeit mit u_2 bildet (siehe Abb. 3). Es muß also das Gehäuse sein, welches diesen Winkel α_2 festlegt.

Aus der Theorie der Zentrifugalpumpen wissen wir, daß die Strömung des Wassers im Gehäuse nach Verlassen des Laufrades beschrieben wird durch die Gleichung

$$R \cdot C_u = \text{konst.} \qquad (21),$$

wo R die Entfernung des betreffenden Wasserteilchens von der Achse bedeutet und C_u die Komponente seiner Geschwindigkeit in tangentialer Richtung. Gl. (21) stellt eine Hyperbel dar mit Abszisse und Ordinate als Asymptoten. Am Austritt aus dem Laufrade ist $R = R_2$ dem Laufradradius und $C_u = C_{u2}$, wie es durch das Austrittsdiagramm bestimmt ist, so daß

$$R \cdot C_u = R_2 \cdot C_{u2} \qquad (21').$$

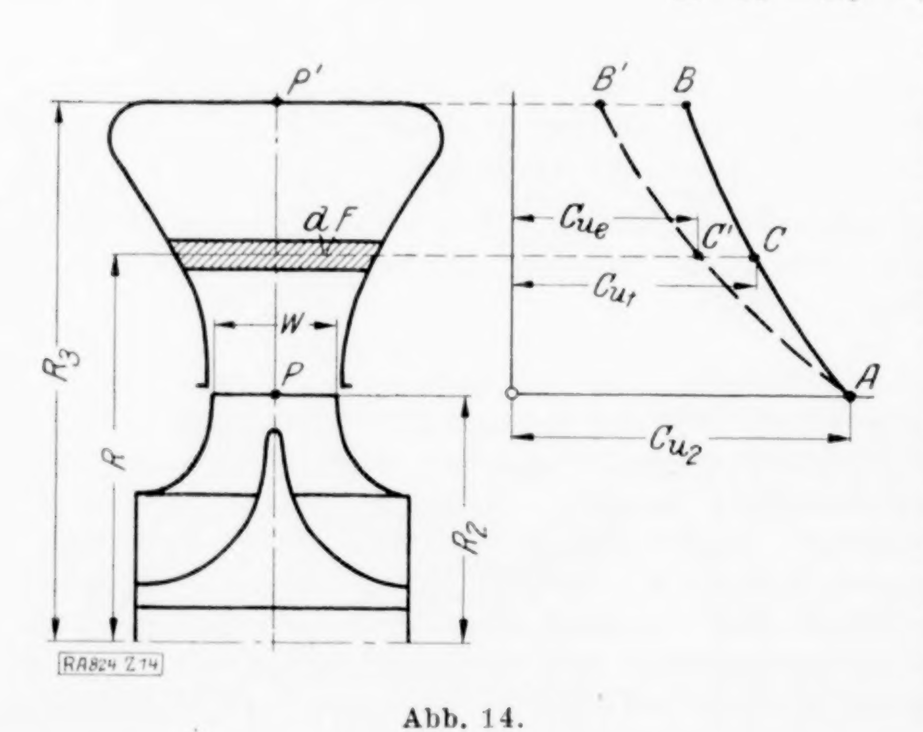


Abb. 14.

Ist der Zungenschnitt des Gehäuses (größter Querschnitt) gegeben, dann erlaubt die Gl. (21) für jeden Punkt der Ordinate $P\,P'$ (siehe Abb. 14) das entsprechende C_u zu berechnen und wir erhalten $A\,B$ als Kurve der Geschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeiten sind theoretische. In Wirklichkeit haben wir Reibungsverluste im Gehäuse und sonstige Gründe, welche diese Geschwindigkeiten verkleinern, so daß die wirkliche Kurve der Geschwindigkeiten, unter dem das Wasser im Gehäuse fließt, $A\,B'$ ist. Bezeichnen wir mit $d\,F$ ein Flächenelement des Gehäusequerschnittes mit dem Radius R und nennen wir C_{ut} die entsprechende theoretische Geschwindigkeit aus der Kurve $A\,B$ und C_{ue} die entsprechende effektive Geschwindigkeit aus der Kurve $A\,B'$, dann ist die effektive Wassermenge, welche durch das Gehäuse fließt, gegeben durch

$$Q = \int_{R_2}^{R_3} d\,F \cdot C_{ue}.$$

Die gleiche Integration mit den theoretischen Geschwindigkeiten würde natürlich eine größere Wassermenge ergeben als sie effektiv durch das Gehäuse fließt.

9. Der Gehäusefaktor. Wir führen nun als Gehäusefaktor ein das Verhältnis dieser theoretischen Wassermenge zur effektiven

$$K=\frac{\int d\,F\cdot C_{u\,t}}{\int d\,F\cdot C_{u\,e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Aus der vorhergehenden Analyse des Laufrades kennen wir nun die effektive Wassermenge, bei der der hydraulische Wirkungsgrad Maximum ist, und aus dem Austrittsdiagramm C_{u2}. Also ist die Kurve $A\,B$ festgelegt. Der Zungenquerschnitt des Gehäuses ist ebenfalls gegeben und wir können die Integration $\int d\,F\cdot C_{u\,t}$ durchführen, wenn auch nicht analytisch, so doch immer graphisch. Auf diese Weise ist der Faktor K aus den Versuchen bestimmt. In unserem Beispiel war die Wassermenge beim besten hydraulischen Wirkungsgrad 0,122 m³/s und C_{u2} 15 m/s. Die graphische Integration $\int d\,F\cdot C_{u\,t}$ ergab 0,177 m³/s, so daß der Gehäusefaktor bestimmt ist zu

$$K=\frac{0{,}177}{0{,}122}=1{,}45\,.$$

Bei der Neuberechnung des Gehäuses rechnen wir zunächst mit der theoretischen Geschwindigkeitskurve $A\,B$, jedoch mit einer Wassermenge Kmal so groß wie die effektive. Ist auf diese Weise der Zungenquerschnitt der Spirale bestimmt, so führen wir die effektive Geschwindigkeitskurve ein, so daß die Integration über den nun bekannten Querschnitt die effektive Wassermenge ergibt. Damit sind dann auch die um die Spirale herumliegenden anderen Querschnitte festgelegt.

Kehren wir nun zurück zu der Aufgabe, die Verbindungsgleichung zwischen Gehäuse und Laufrad zu finden. Wir müssen dasjenige Element einführen, das beiden gemeinsam ist, und das ist die Wassermenge am Punkte besten hydraulischen Wirkungsgrades. Der Spaltverlust macht zwar die durch das Laufrad fließende Wassermenge etwas größer. Bezeichnen wir mit Q die durch das Gehäuse fließende Wassermenge, dann haben wir am Laufradaustritt $(Q+Q_{sp})=\varphi\cdot\pi\,D_2\,W\cdot C_{R2}$. φ ist das Verhältnis des freien Austrittsquerschnittes zu $\pi\,D_2\,W$. Setzen wir:

$$\left(\frac{Q+Q_{sp}}{Q}\right)=\varepsilon\,,$$

wo ε den Spaltverlustkoeffizienten bedeutet, so ist

$$Q=\frac{\varphi\cdot\pi\cdot D_2\cdot W}{\varepsilon}\,C_{R2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Am Gehäuse ist Q bestimmt durch

$$Q=\frac{1}{K}\int\limits_{R_2}^{R_3} d\,F\cdot C_{u\,t}\,.$$

Aus Gl. (21) folgt:

$$C_{u\,t}=\frac{R_2}{R}\cdot C_{u2}=\frac{D_2}{2\cdot R}\,C_{u2}$$

somit

$$Q=\frac{1}{K}\int\limits_{R_2}^{R_3} d\,F\cdot\frac{D_2}{2\cdot R}\cdot C_{u2}=\frac{D_2\cdot C_{u2}}{2\cdot K}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{d\,F}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

Gl. (23) und (24) kombiniert gibt

$$\frac{\varphi\cdot\pi\,D_2\,W\cdot C_{R2}}{\varepsilon}=\frac{D_2\cdot C_{u2}}{2\,K}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{d\,F}{R} \quad \text{und} \quad \frac{C_{R2}}{C_{u2}}=\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\varepsilon}{2\cdot\pi\cdot K\cdot\varphi\cdot W}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{d\,F}{R} \quad . \quad (25).$$

Gl. (25) ist nun die gesuchte Verbindungsgleichung zwischen Laufrad und Gehäuse. Das $\int\frac{d\,F}{R}$ ist eine reine geometrische Größe, welche den Zungenquerschnitt der Spirale charakterisiert. Die Größe kann immer durch eine graphische Integration bestimmt werden. Und jetzt haben wir auch alle Elemente, um das Austrittsdiagramm des Punktes besten hydraulischen Wirkungsgrades aufzuzeichnen; folglich sind auch C_{R2}, welches die Wassermenge bestimmt, und C_{u2}, welches die totale Druckhöhe bestimmt, bekannt.

In Gl. (19) fanden wir für C_{u2}

$$C_{u2}=u_2'\left(1-\frac{C_{R2}}{u_2\operatorname{tg}\beta_2}\right).$$

Es ist

$$C_{R2} = C_{u2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \,, \qquad C_{u2} = u_2' \left(1 - \frac{C_{u2} \operatorname{tg} \alpha_2}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}\right)$$

somit

$$C_{u2} = \frac{u_2'}{1 + \dfrac{u_2' \operatorname{tg} \alpha_2}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}} \quad . \quad . \quad (26), \qquad C_{R2} = \frac{u_2' \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \dfrac{u_2' \operatorname{tg} \alpha_2}{u_2 \operatorname{tg} \beta_2}} \quad . \quad (27).$$

Und für Wassermenge und Druck für ein gegebenes Laufrad und gegebenes Gehäuse bei bestem hydraulischen Wirkungsgrad erhalten wir:

$$Q = \left(\frac{\varphi \cdot \pi D_2 \cdot W}{\varepsilon}\right) \left(\frac{u_2' \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \dfrac{u_2' \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{u_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_2}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

$$H = \left(\frac{u_2 u_2' - u_1 u_1'}{g}\right) \left(1 - \frac{\left(\dfrac{u_2'}{u_2}\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\left(\dfrac{u_2'}{u_2}\right) \operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \beta_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

In dieser Gleichung ist $\operatorname{tg} \alpha_2$ durch Gl. (25) bestimmt. Die Gl. (28) und (29) können benutzt werden sowohl zur Berechnung einer neuen Pumpe, wie auch zur Bestimmung von Wassermenge und Druck einer Pumpe von gegebenen Dimensionen. Nützliche Dienste leisten werden sie in all den vielen Fällen der Praxis des Pumpenbaues, wo für ein gegebenes Laufrad ein neues Gehäuse benutzt wird, oder umgekehrt für ein gegebenes Gehäuse ein neues Laufrad, wo der Schaufelwinkel des Laufrades verändert oder der Durchmesser des Schaufelrades verkleinert wird. In diesem letzteren Fall verhalten sich u_2 und u_2' wie die Durchmesser und Gl. (28) zeigt dann, daß die Wassermengen sich wie die Quadrate der Durchmesser verändern, während aus (29) folgt, daß die Druckhöhe noch etwas schneller fällt, als es dem Quadrate der Durchmesser entsprechen würde.

10. Schlußfolgerungen. Die Diskrepanz zwischen den Resultaten der klassischen eindimensionalen Theorie, die allgemein im Pumpenbau benutzt wird, und der wirklichen Praxis zwingt uns zur Einführung von Korrektionsfaktoren, deren Größe wir nur aus Versuchen ableiten können. Dem Pumpenbau stehen eine große Zahl Versuche zur Verfügung, die Drosselkurve und Leistungskurve betreffen. Die vorliegende Studie hat eine sowohl graphische wie analytische Methode entwickelt, die erlaubt aus diesen Versuchskurven alle diejenigen Faktoren abzuleiten die notwendig sind, um Theorie und Praxis in Uebereinstimmung zu bringen. Zur gleichen Zeit sind diese Faktoren in die eindimensionale Theorie eingeführt und so neue Gleichungen entwickelt worden, welche zur Berechnung neuer Pumpen benutzt werden können, wenn die Korrektionsfaktoren als bekannt vorausgesetzt werden können.

Die Analyse basiert zum großen Teil auf der Leistungskurve nnd ihre Exaktheit steht und fällt mit der Exaktheit, mit der die Leistungskurve aufgenommen worden ist. Nur solche Leistungskurven, welche durch direkte Messung mit Hilfe von Torsions oder Elektrodynamometer erhalten worden sind, sollten benutzt werden, und es ist ratsam auf den Teil der Leistungskurve um die Punkte besten hydraulischen oder totalen Wirkungsgrades besondere Sorgfalt zu verwenden.

Es wäre sehr interessant, mit dieser Methode eine größere Zahl von Versuchskurven zu analysieren von Pumpen verschiedenster Konstruktionen und Größen und nachzusehen, ob diese Korrektionsfaktoren konstant sind oder etwa sich mit Konstruktion und Größe verändern, eine Aufgabe, die einer zukünftigen Studie vorbehalten sein soll. 824

Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äußeren und inneren Dämpfung.

Von **HEINRICH HOLZER** in Schwabach.

Für die Theorie der Prüfvorrichtungen zur Bestimmung der Biegungs-Schwingungsfestigkeit und der Dämpfungsfähigkeit von Werkstoffen, insbesondere für jene, die mit Resonanz arbeiten, ist eine genaue Berechnung der Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äußeren und inneren Dämpfung von ausschlaggebender Bedeutung. (Ueber solche Prüfvorrichtungen hat z. B. Hr. W. Hort in der Z. f. tech. Physik 1924 berichtet und in Abb. 1 ist die Biegungs-Schwingungsmaschine

der M. A. N. abgebildet.) Aus dem Schrifttum ist mir eine Lösung der allgemeinen Biegungsgleichung mit äußerer und innerer Dämpfung nicht bekannt. Selbst die Neuauflage der »Technischen Schwingungslehre« von W. Hort (Springer, Berlin 1922) behandelt nur die ungedämpften Biegungsschwingungen [1]. Für Drehschwingungen habe ich die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung in meinem Buch: Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau (Springer, Berlin 1921) veröffentlicht [2]. Im folgenden soll die allgemeine Lösung für Biegungsschwingungen versucht werden.

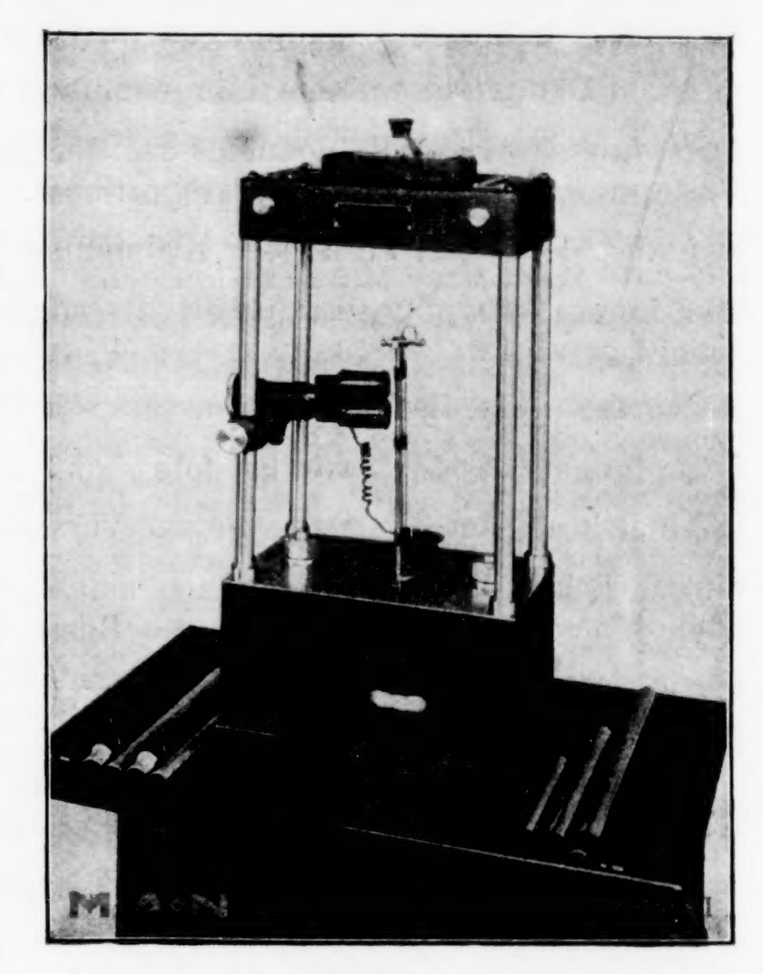


Abb. 1.

1. Ansatz. Die den Biegungsschwingungen entgegenwirkenden Kräfte sind zum Teil äußere Reibungskräfte, wie die Reibung in dem das schwingende System umgebenden Mittel (Luft, Oel, Wasser), zum Teil innere Reibungskräfte infolge unvollkommener Elastizität der Biegungsfedern. Um diese Widerstände rechnerisch berücksichtigen zu können, müßten wir das Gesetz kennen, nach welchem sie sich im Verlauf der Schwingung ändern. Dies Gesetz braucht in Wirklichkeit gar nicht einfach zu sein. Um aber unsere Rechnung nicht unnötig verwickelt zu machen, begnügen wir uns mit der einfachen Annahme, daß alle Widerstände der augenblicklichen Schwingungsgeschwindigkeit proportional und ihr entgegengesetzt seien. Wir setzen also die dämpfende Kraft $-k v$, wobei wir k, den Dämpfungsfaktor als eine unveränderliche Größe betrachten und unter v die augenblickliche Geschwindigkeit oder Verformungsgeschwindigkeit verstehen. Da es sich hier nicht um den Vergleich von Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen oder um solche mit zeitlich veränderlichen Frequenzen handelt, ist diese Vereinfachung so lange zulässig, als sie nicht zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt. In Wirklichkeit wird die Dämpfung auch bei Schwingungen mit unveränderlicher Frequenz in anderer als linearer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit stehen. Wir definieren daher den Dämpfungsfaktor k als eine während der harmonischen Schwingung gegebener Frequenz unveränderliche Größe von solcher Art, daß die rechnerische bei einer Schwingung mit der Frequenz ω und dem Ausschlag a geleistete Dämpfungsarbeit, die bekanntlich durch $\mathfrak{A} = \pi\, k\, \omega\, a^2$ ausgedrückt wird [3], gleich der wirklichen Widerstandsarbeit einer Schwingung wird. Jeder Frequenz gehört also im allgemeinen ein besonderer Dämpfungsfaktor zu; möglicherweise kann der Dämpfungsfaktor bei gleicher Frequenz sogar noch vom Ausschlag abhängig sein.

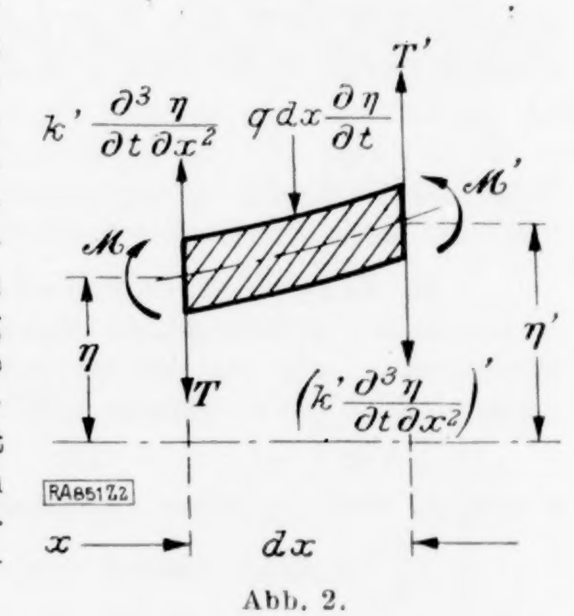


Abb. 2.

In Abb. 2 ist das klein gedachte Element einer Biegungsfeder in einer Entfernung x vom Ursprung von der Länge $d\,x$ dargestellt.

E sei der Elastizitätsmodul des Federwerkstoffes in $\mathrm{kgcm^{-2}}$, γ das Gewicht der Raumeinheit in $\mathrm{kgcm^{-3}}$, γ/g also die Masse der Raumeinheit in $\mathrm{kgcm^{-4}\,s^2}$, F der Federquerschnitt in $\mathrm{cm^2}$, $\mu = \frac{\gamma}{g} F\,(\mathrm{kgcm^{-2}\,s^2})$ die Masse der Längeneinheit, J das Trägheits-

[1]) Hort, Schwingungslehre § 90.
[2]) Holzer, Drehschwingungen, Abschn. 27.
[3]) Holzer, Drehschwingungen, S. 93.

moment des Federquerschnittes um die Biegungsachse in cm^4, $\frac{\gamma}{g} J$ das körperliche Trägheitsmoment der Längeneinheit der Feder um die Biegungsachse in $kg\,s^2$, η die augenblickliche Durchbiegung der Feder an der Stelle x in cm, T die Querkraft in kg, M das Moment der Biegungsspannungen im Querschnitt x in kgcm, q der Dämpfungsfaktor der äußeren Dämpfung auf die Längeneinheit bezogen in $kgcm^{-2}\,s$, so daß $q\,dx\frac{\partial \eta}{\partial t}$ die äußere Dämpfungskraft am Längenelement der Feder ist. Die innere Dämpfung setzen wir der Verformungsgeschwindigkeit proportional. Die relative Verformung zwischen den Stellen x und $x+dx$ ist durch die Krümmung des Längenelements, also durch $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ gegeben. Die innere Dämpfungskraft tritt als solche im entgegengesetzten Sinne sowohl im Querschnitt x wie an der Stelle $x+dx$, an letzter um den ∞ kleinen Zuwachs geändert, auf. Bezeichnen wir also mit k' den inneren Dämpfungsfaktor, so stellt $k'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)$ die innere Dämpfungskraft dar, woraus folgt, daß k' von der Dimension kgcm s ist. Die Massenträgheitskraft des Elements gegen Verschiebung in der Richtung η wird durch $\mu\,dx\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ ausgedrückt. Das Massenteilchen macht aber außer der Verschiebung in der Richtung η noch eine Drehbewegung um die Biegungsachse. Da der Winkel des Teilchens gegen die x-Achse $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ist, so ist $\frac{\gamma}{g} J\,dx\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ das der Drehung widerstehende Moment der Massenträgheit.

Bei Abwesenheit einer erregenden äußeren Kraft an der Stelle x bedingt das Gleichgewicht aller am Element wirkenden Kräfte und Momente die Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx - k'\frac{\partial^4 \eta}{\partial t\,\partial x^3}dx - q\,dx\frac{\partial \eta}{\partial t} - \mu\,dx\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$T\,dx - k'\frac{\partial^3 \eta}{\partial t\,\partial x^2}dx + \frac{\partial M}{\partial x}dx - \frac{\gamma}{g}J\,dx\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2\,\partial x} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Den Zusammenhang der Formänderung mit den Spannungsmomenten liefert die elastische Biegungsgleichung:

$$M = EJ\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Die Wegschaffung von T und die Berücksichtigung der Biegungsgleichung (3) ergibt die gesuchte Differentialgleichung der Schwingung:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{q}{EJ}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\mu}{EJ}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{gE}\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2\,\partial x^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I).$$

Wie man bemerkt, ist auch die innere Dämpfung aus der Differentialgleichung weggefallen. Sie wird aber bei Berücksichtigung der Randbedingungen von selbst wieder hereinkommen.

2. Erzwungene Schwingungen. Die durch eine harmonische Kraft $P = A_P \sin \omega t + B_P \cos \omega t$ erzwungenen Schwingungen sind harmonische Schwingungen der gleichen Frequenz ω, wie die der erregenden Kraft und mit dem nach Zeit und Ort veränderlichen Ausschlag η. Wir führen also als Lösungsansatz in unsere Differentialgleichungen ein:

$$\eta = A_x \sin \omega t + B_x \cos \omega t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

worin A_x und B_x reine Funktionen von x sind. Aus (4) leiten wir ab:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega\,(A_x \cos \omega t - B_x \sin \omega t)\,, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\,\omega^2\,(A_x \sin \omega t + B_x \cos \omega t).$$

Die Einführung dieser Beziehungen in Gleichung (I) ergibt, wenn wir den Differentiationsgrad nach x durch in Klammern gesetzte Exponenten ausdrücken:

$$A_x^{(4)} \sin \omega t + B_x^{(4)} \cos \omega t + \frac{q\,\omega}{EJ}(A_x \cos \omega t - B_x \sin \omega t)$$
$$- \frac{\mu\,\omega^2}{EJ}(A_x \sin \omega t + B_x \cos \omega t) + \frac{\gamma\,\omega^2}{gE}\left(A_x^{(2)} \sin \omega t + B_x^{(2)} \cos \omega t\right) = 0 \quad . \; . \quad (5).$$

Damit diese Bedingung für jeden Wert t erfüllt sei, müssen die Beizahlen von $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ einzeln verschwinden. Das liefert die Gleichungen:

$$A_x^{(4)} - \frac{q\,\omega}{EJ}B_x - \frac{\mu\,\omega^2}{EJ}A_x + \frac{\gamma\,\omega^2}{gE}A_x^{(2)} = 0\,, \qquad B_x^{(4)} + \frac{q\,\omega}{EJ}A_x - \frac{\mu\,\omega^2}{EJ}B_x + \frac{\gamma\,\omega^2}{gE}B_x^{(2)} = 0 \quad (II).$$

Aus der 1. Gleichung (II) erhält man:

$$B_x = \frac{E\,J}{q\,\omega}\left[A_x^{(4)} + \frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}A_x^{(2)} - \frac{\mu\,\omega^2}{E\,J}A_x\right], \qquad B_x^{(2)} = \frac{E\,J}{q\,\omega}\left[A_x^{(6)} + \frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}A_x^{(4)} - \frac{\mu\,\omega^2}{E\,J}A_x^{(2)}\right]$$

$$B_x^{(4)} = \frac{E\,J}{q\,\omega}\left[A_x^{(8)} + \frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}A_x^{(6)} - \frac{\mu\,\omega^2}{E\,J}A_x^{(4)}\right].$$

Mit diesen Werten ergibt die 2. Gleichung (II) nach einiger Umformung:

$$A_x^{(8)} + 2\,\frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}A_x^{(6)} - \left[2\,\frac{\mu\,\omega^2}{E\,J} - \left(\frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}\right)^2\right]A_x^{(4)} - 2\,\frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}\,\frac{\mu\,\omega^2}{E\,J}A_x^{(2)} + \frac{(\mu\,\omega^2)^2 + (q\,\omega)^2}{E^2\,J^2}A_x = 0 \quad \text{(III)}.$$

Dieselbe lineare Differentialgleichung 8. Ordnung hätte sich auch für B_x nach Wegschaffung von A_x aus den Gleichungen (II) ergeben. Die weitere Behandlung dieser Differentialgleichung ist bekannt. Schreibt man die ihr zugehörige charakteristische Gleichung durch Zerlegung in zwei Faktoren in folgender Form:

$$\left[w^4 + \frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}w^2 - \left(\frac{\mu\,\omega^2}{E\,J} + i\,\frac{q\,\omega}{E\,J}\right)\right]\left[w^4 + \frac{\gamma\,\omega^2}{g\,E}w^2 - \left(\frac{\mu\,w^2}{E\,J} - i\,\frac{q\,\omega}{E\,J}\right)\right] = 0,$$

so erkennt man leicht, daß sie nur komplexe Wurzeln hat. Mit Hilfe der Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\gamma\omega^2}{2\,g\,E} \equiv c, \qquad \frac{\mu\,\omega^2}{E\,J} + \left(\frac{\gamma\,\omega^2}{2\,g\,E}\right)^2 \equiv a, \qquad \frac{q\,\omega}{E\,J} \equiv \mathrm{b}, \qquad -c + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv d_1, \\
&-c - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \equiv -d_2, \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \equiv f, \qquad p_1 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{d_1^2+f^2}+d_1}{2}} \\
&r_1 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{d_1^2+f^2}-d_1}{2}}, \qquad p_2 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{d_2^2+f^2}-d_2}{2}}, \qquad r_2 \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{d_2^2+f^2}+d_2}{2}}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

sind die acht Wurzeln dieser Gleichungen enthalten in den Formen:

$$w_{1,2,3,4} = \pm(p_1 \pm i\,r_1), \qquad w_{5,6,7,8} = \pm(p_2 \pm i\,r_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Lösung der Differentialgleichung (III) hat also die Form:

$$\begin{aligned}
A_x &= e^{p_1 x}(A_1 \sin r_1 x + B_1 \cos r_1 x) + e^{-p_1 x}(C_1 \sin r_1 x + D_1 \cos r_1 x) \\
&+ e^{p_2 x}(A_2 \sin r_2 x + B_2 \cos r_2 x) + e^{-p_2 x}(C_2 \sin r_2 x + D_2 \cos r_2 x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IVa)},
\end{aligned}$$

worin $A_1, B_1 \ldots D_2$, die acht Integrationskonstanten sind, die im Einzelfall aus den Randbedingungen gegeben sind.

Genau so lautet, mit anderen Integrationskonstanten $A_1', B_1' \ldots$, die Lösungsgleichung für B_x. Da aber die Gesamtlösung nur acht verschiedene Integrationskonstanten verlangt, so müssen zwischen den Konstanten von A_x und B_x Beziehungen bestehen. Um diese Beziehungen zu finden, führen wir die Partikulärlösung für A_x und B_x in die Eliminationsgleichung (II) ein. Dazu schreiben wir zunächst die partikuläre Lösung für A_x (ohne Zeiger):

$$A_x = e^{p\,x}(A \sin r\,x + B \cos r\,x) + e^{-p\,x}(C \sin r\,x + D \cos r\,x)$$

und leiten daraus durch Differentiation ab:

$$\left.\begin{aligned}
A_x^{(1)} &= e^{p\,x}[(p\,A - r\,B)\sin r\,x + (p\,B + r\,A)\cos r\,x] + e^{-p\,x}[(-p\,C - r\,D)\sin r\,x \\
&\qquad + (-p\,D + r\,C)\cos r\,x] \\
A_x^{(2)} &= e^{p\,x}\{[(p^2 - r^2)\,A - 2\,p\,r\,B]\sin r\,x + [(p^2 - r^2)\,B + 2\,p\,r\,A]\cos r\,x\} \\
&+ e^{-p\,x}\{[(p^2 - r^2)\,C + 2\,p\,r\,D]\sin r\,x + [(p^2 - r^2)\,D - 2\,p\,r\,C]\cos r\,x\} \\
A_x^{(3)} &= e^{p\,x}\{[(p^3 - 3\,r^2\,p)\,A + (r^3 - 3\,r\,p^2)\,B]\sin r\,x + [(p^3 - 3\,r^2\,p)\,B \\
&- (r^3 - 3\,r\,p^2)\,A]\cos r\,x\} + e^{-p\,x}\{[(-p^3 + 3\,r^2\,p)\,C + (r^3 - 3\,r\,p^2)\,D]\sin r\,x \\
&\qquad + [(-p^3 + 3\,r^2\,p)\,D - (r^3 - 3\,r\,p^2)\,C]\cos r\,x\} \\
A_x^{(4)} &= e^{p\,x}\{[(p^4 - 6\,r^2\,p^2 + r^4)\,A + 4\,r\,p\,(r^2 - p^2)\,B]\sin r\,x + [(p^4 - 6\,r^2\,p^2 + r^4)\,B \\
&- 4\,r\,p(r^2 - p^2)\,A]\cos r\,x\} + e^{-p\,x}\{[(p^4 - 6\,r^2 p^2 + r^4)\,C - 4\,r\,p(r^2 - p^2)\,D]\sin r\,x \\
&\qquad + [(p^4 - 6\,r^2\,p^2 + r^4)\,D + 4\,r\,p\,(r^2 - p^2)\,C]\cos r\,x\}
\end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Die zugehörige Form für B_x schreiben wir entsprechend:

$$B_x = e^{p\,x}(A' \sin r\,x + B' \cos r\,x) + e^{-p\,x}(C' \sin r\,x + D' \cos r\,x).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung (II) erhält man einen Ausdruck, der aus Gliedern mit den Faktoren $e^{\pm p x} \sin r x$, $e^{\pm p x} \cos r x$ besteht. Damit diese Gleichung für jeden Wert von x gültig sei, müssen die Glieder einzeln verschwinden und dies führt zu:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[p^4 - 6 p^2 r^2 + r^4 + \frac{\gamma \omega^2}{g E}(p^2 - r^2) - \frac{\mu \omega^2}{E J}\right] A + \left[4 p r (r^2 - p^2) - \frac{\gamma \omega^2}{g E} 2 r p\right] B = \frac{q \omega}{E J} A' \\
&\left[p^4 - 6 p^2 r^2 + r^4 + \frac{\gamma \omega^2}{g E}(p^2 - r^2) - \frac{\mu \omega^2}{E J}\right] B - \left[4 p r (r^2 - p^2) - \frac{\gamma \omega^2}{g E} 2 r p\right] A = \frac{q \omega}{E J} B' \\
&\left[p^4 - 6 p^2 r^2 + r^4 + \frac{\gamma \omega^2}{g E}(p^2 - r^2) - \frac{\mu \omega^2}{E J}\right] C - \left[4 p r (r^2 - p^2) - \frac{\gamma \omega^2}{g E} 2 r p\right] D = \frac{q \omega}{E J} C' \\
&\left[p^4 - 6 p^2 r^2 + r^4 + \frac{\gamma \omega^2}{g E}(p^2 - r^2) - \frac{\mu \omega^2}{E J}\right] D + \left[4 p r (r^2 - p^2) - \frac{\gamma \omega^2}{g E} 2 r p\right] C = \frac{q \omega}{E J} D'
\end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Nun gilt aber, wie man leicht nachweist, für unsere oben entwickelten Werte p und r:

$$p^4 - 6 r^2 p^2 + r^4 + \frac{\gamma \omega^2}{g E}(p^2 - r^2) - \frac{\mu \omega^2}{E J} = 0 , \qquad 4 p r (r^2 - p^2) - \frac{\gamma \omega^2}{g E} 2 p r = \mp \frac{q \omega}{E J} \quad (V),$$

das obere Zeichen für p_1, r_1, das untere für p_2, r_2. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (9)

$$\left.\begin{aligned}
A_1' &= - B_1 , & B_1' &= + A_1 , & C_1' &= + D_1 , & D_1' &= - C_1 \\
A_2' &= + B_2 , & B_2' &= - A_2 , & C_2' &= - D_2 , & D_2' &= + C_2
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (10).$$

Damit wird die Schwingungsform B_x:

$$\begin{aligned}
B_x = {} & e^{p_1 x}(- B_1 \sin r_1 x + A_1 \cos r_1 x) + e^{-p_1 x}(D_1 \sin r_1 x - C_1 \cos r_1 x) \\
& + e^{p_2 x}(B_2 \sin r_2 x - A_2 \cos r_2 x) + e^{-p_2 x}(- D_2 \sin r_2 x + C_2 \cos r_2 x) \quad . \; . \quad (\text{IV b}).
\end{aligned}$$

3. Zahlenbeispiel. Zur Ermittlung der Integrationskonstanten A_1, B_1 . . . D_2 dienen die Randbedingungen. An einem praktischeu Zahlenbeispiel möge der Gang der Rechnung gezeigt werden.

In der in Abb. 1 dargestellten Schwingungsmaschine war ein rechteckiger Stahlstab von 1,51 cm $\times$ 0,45 cm Querschnitt längs der langen Querschnittsseite eingespannt. Der Stab von 21,2 cm freier Länge trug am oberen freien Ende eine Masse m, den Unterbrecherbügel von 0,033 kg Gewicht für den Erregermagnet. Um die Aufgabe möglichst zu vereinfachen, sei angenommen, daß die erregende Magnetkraft a am freien Stabende wirkt. Als Schwingungszahl wurde 3250/min beobachtet, so daß die Frequenz der Erregung $\omega = 340 \text{ s}^{-1}$ war.

Es ist

$$\frac{\gamma}{g} = 8 \cdot 10^{-6} \text{kgcm}^{-4}\text{s}^2 , \qquad E = 2 \cdot 10^6 \text{kgcm}^{-2} , \qquad F = 1{,}51 \cdot 0{,}45 \text{ cm}^2 , \qquad J = 0{,}0115 \text{ cm}^4 .$$

Der auf 1 cm bezogene äußere Dämpffaktor q sei verhältnismäßig hoch mit $q = 10^{-4} \text{kgcm}^{-2}\text{s}$ angenommen, so daß ein Stabteilchen von 1 cm Länge bei einer Geschwindigkeit von 1 cm s^{-1} eine Dämpfungskraft von 0,0001 kg erfährt. Mit diesen Zahlen berechnet sich:

$$\frac{\gamma \omega^2}{g E} = 0{,}4624 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} , \qquad \mu = \frac{\gamma}{g} F = 5{,}436 \cdot 10^{-6} \text{ kgcm}^{-2}\text{s}^2 .$$

$$\frac{\mu \omega^2}{E J} = 27{,}32 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-4} , \qquad \frac{q \omega}{E J} = 1{,}48 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-4} .$$

Damit wird:

$$c = 0{,}2312 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} , \qquad a = 27{,}32 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-4} , \qquad b = 1{,}48 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-4} ,$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} = 5{,}2287694 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} , \qquad f = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} = 0{,}1415247 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

$$d_1 = 5{,}2285382 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} , \qquad d_2 = 5{,}2290006 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

$$p_1 = 7{,}2315252 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} , \qquad r_1 = 0{,}0978527 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

$$p_2 = 0{,}0978484 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} , \qquad r_2 = 7{,}2318449 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} .$$

Das Zahlenbeispiel hat erkennen lassen, daß man die Winkelbeschleunigung der Federmasse in diesem Fall vernachlässigen darf. Dann vereinfacht sich aber die Rechnung in folgender Weise; indem man $c = 0$ setzt:

$$d_1 = d_2 , \qquad p_1 = r_2 \equiv p = 0{,}07231685 , \qquad p_2 = r_1 \equiv r = 0{,}000978504 .$$

Für die Bestimmung der acht Integrationskonstanten stehen folgende Bedingungen zur Verfügung: Lassen wir den Ursprung des Koordinatensystems mit dem Einspannpunkt

zusammenfallen, so ist für $x = 0$ 1. $\eta = 0$ und 2. $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ oder mit den Gleichungen (8) und (10)

$$B_1 + D_1 + B_2 + D_2 = 0 \quad (1\,a), \qquad A_1 - C_1 - A_2 + C_2 = 0 \quad (1\,b)$$

$$p\,B_1 + r\,A_1 - p\,D_1 + r\,C_1 + r\,B_2 + p\,A_2 - r\,D_2 + p\,C_2 = 0 \quad . \quad . \quad (2\,a),$$

$$p\,A_1 - r\,B_1 + p\,C_1 + r\,D_1 - r\,A_2 + p\,B_2 - r\,C_2 - p\,D_2 = 0 \quad . \quad . \quad (2\,b).$$

Daraus findet sich:

$$2\,A_2 = A_1 - B_1 - C_1 + D_1\,, \qquad 2\,B_2 = -A_1 - B_1 - C_1 - D_1$$

$$2\,C_2 = -A_1 - B_1 + C_1 + D_1\,, \qquad 2\,D_2 = A_1 - B_1 + C_1 - D_1\,.$$

Für das freie Stabende müssen das biegende Moment M und die Querkraft T verschwinden bzw. eine vorgeschriebene Größe haben. Da in unserem Beispiel am Stabende eine punktförmige Masse m sitzt und dort die erregende Kraft P angreift, so muß $M = 0$ und $T = P - m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k\frac{\partial \eta}{\partial t}$ sein, da $m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ die Massenträgheit und $k\frac{\partial \eta}{\partial t}$ die Dämpfungskraft am Unterbrecherbügel ist. T wird aber nach unserer Momentengleichung (2) ausgedrückt durch

$$T = -E\,J\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + k'\frac{\partial^3 \eta}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\gamma}{g}J\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2\,\partial x}\,,$$

wovon wir den letzten Posten vernachlässigt haben. Die Bedingungen für das freie Ende lauten somit:

$$x = l\,, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0\,, \qquad -E\,J\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + k'\frac{\partial^3 \eta}{\partial t\,\partial x^2} = P - m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k\frac{\partial \eta}{\partial t}\,.$$

Man sieht hieraus, wie die innere Dämpfung (k') infolge der Randbedingungen wieder hereinkommt.

Anders ausgedrückt, lauten die Bedingungen am freien Ende:

$$A_l^{(2)} = B_l^{(2)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$A_l^{(3)}\sin\omega t + B_l^{(3)}\cos\omega t - \frac{k'\omega}{E\,J}\left(A_l^{(2)}\cos\omega t - B_l^{(2)}\sin\omega t\right) + \frac{m\omega^2}{E\,J}\left(A_l\cos\omega t + B_l\sin\omega t\right)$$

$$-\frac{k\omega}{E\,J}\left(A_l\cos\omega t - B_l\sin\omega t\right) = -\frac{A_P\sin\omega t + B_P\cos\omega t}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

oder in die Phasengleichungen zerlegt:

$$A_l^{(3)} + \frac{k'\omega}{E\,J}B_l^{(2)} + \frac{m\,\omega^2}{E\,J}A_l + \frac{k\,\omega}{E\,J}B_l = -\frac{A_P}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a),$$

$$B_l^{(3)} - \frac{k'\omega}{E\,J}A_l^{(2)} + \frac{m\,\omega^2}{E\,J}B_l - \frac{k\,\omega}{E\,J}A_l = -\frac{B_P}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b).$$

Für $l = 21{,}2$ wird $p\,l = 1{,}53311722 = 87^0\,50'\,28{,}1''$, $\quad r\,l = 0{,}020744285 = 1^0\,11'\,18{,}8''$.

$$e^{pl}\sin r\,l = 0{,}09609262 \qquad e^{rl}\sin p\,l = 1{,}0202364$$

$$e^{pl}\cos r\,l = 4{,}631598 \qquad e^{rl}\cos p\,l = 0{,}03845992$$

$$e^{-pl}\sin r\,l = 0{,}00447756 \qquad e^{-rl}\sin p\,l = 0{,}9787743$$

$$e^{-pl}\cos r\,l = 0{,}2158152 \qquad e^{-rl}\cos p\,l = 0{,}03689692\,.$$

Mit diesen Zahlen liefern die Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 1{,}1579317\,A_1 + 24{,}2039584\,B_1 - 0{,}0071311\,C_1 + 1{,}1290816\,D_1 \\ &- 5{,}3291378\,A_2 - 0{,}3454867\,B_2 - 5{,}1230069\,C_2 - 0{,}0544048\,D_2 \end{aligned}\right\} \quad (3\,a).$$

Für die Gleichung (3 b) ist gemäß (10) in (3 a) nur zu ersetzen:

$$A_1 \text{ durch } -B_1\,, \quad B_1 \text{ durch } A_1\,, \quad C_1 \text{ durch } D_1\,, \quad D_1 \text{ durch } -C_1\,.$$

$$A_2 \;\text{»}\; B_2\,, \quad B_2 \;\text{»}\; -A_2\,, \quad C_2 \;\text{»}\; -D_2\,, \quad D_2 \;\text{»}\; C_2\,.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen für das eingespannte Ende wird daraus:

$$-C_1 = 7{,}5931235\,A_1 + 0{,}1624679\,B_1$$

$$D_1 = 7{,}5931235\,B_1 - 0{,}1624679\,A_1$$

Mit Berücksichtigung der Gl. (10) und mit den Werten:

$$\frac{m\,\omega^2}{E\,J}\cdot 10^5 = 16{,}9\,, \qquad \frac{k\,\omega}{E\,J}\cdot 10^5 = 0{,}2\,, \qquad \frac{k'\,\omega}{E\,J}\cdot 10^2 = 0{,}15$$

erhält man schließlich aus den Gl. (4):

$$24{,}096247\, A_1 - 19{,}314823\, B_1 = -8{,}695652\, A_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a),$$

$$-24{,}096247\, B_1 - 19{,}314823\, A_1 = -8{,}695652\, B_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b).$$

Daraus findet man:

$$A_1 = -0{,}2197069\, A_P + 0{,}1761104\, B_P, \qquad B_1 = +0{,}1761104\, A_P + 0{,}2197069\, B_P,$$
$$C_1 = 1{,}6396493\, A_P - 1{,}3729233\, B_P, \qquad D_1 = 1{,}3729233\, A_P + 1{,}6396493\, B_P,$$
$$A_2 = -0{,}3312717\, A_P + 1{,}4844881\, B_P, \qquad B_2 = -1{,}4844881\, A_P - 0{,}3312717\, B_P,$$
$$C_2 = 1{,}5280846\, A_P - 0{,}0645457\, B_P, \qquad D_2 = -0{,}0645457\, A_P - 1{,}5280846\, B_P.$$

Der Ausschlag am freien Ende berechnet sich damit zu:

$$A_l = 2{,}196399\, A_P + 2{,}764462\, B_P, \qquad B_l = -2{,}764462\, A_P + 2{,}196399\, B_P.$$

Die Wahl der Phasen ist unserem Ermessen anheimgestellt. Beziehen wir sie auf die erregende Kraft P, so ist $A_P = P$ und $B_P = 0$ su setzen. Damit wird

$$A_l = 2{,}1964\, P, \qquad B_l = -2{,}7645\, P,$$

also der Gesamtausschlag $C_l = \sqrt{A_l^2 + B_l^2} = 3{,}5316\, P$.

Um also einen Ausschlag am freien Ende von 1 cm zu erzielen, ist eine erregende Kraft von $P_1 = \frac{1}{3{,}5316} = 0{,}28316$ kg erforderlich. Der Phasenwinkel des Ausschlags gegen die Erregung ist

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{B_l}{A_l} = \operatorname{arctg} - \frac{2{,}7645}{2{,}1964} = \operatorname{arctg} - 1{,}2586 = -51^0\, 32',$$

woraus ersichtlich, daß wir uns dabei dicht bei Resonanz befinden. Die Biegungsbeanspruchung des Stabes ist an der Einspannstelle am größten. Sie wird für 1 cm Ausschlag des freien Endes berechnet aus:

$$M = E\,J \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{x=0} = E\,J\,(A_x^{(2)} \sin \omega\, t + B_x^{(2)} \cos \omega\, t)_{x=0}$$

$$M_{\max} = E\,J \sqrt{(A^{(2)})_0^2 + (B_0^{(2)})^2}\,.$$

$$A_0^{(2)} = (p^2 - r^2)(B_1 + D_1 - B_2 - D_2) + 2\,p\,r\,(A_1 - C_1 + A_2 - C_2)$$
$$= 10^{-3}\,(15{,}67279\, A_P + 19{,}88274\, B_P)$$
$$B_0^{(2)} = 10^{-3}\,(-19{,}88274\, A_P + 15{,}67279\, B_P), \qquad \sqrt{(A_0^{(2)})^2 + (B_0^{(2)})^2} = 10^{-3} \cdot 25{,}31718\, P.$$

$$M_{\max} = 164{,}8827 \text{ kgcm}, \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_0} = 3226 \text{ kgcm}^{-2}.$$

4. Eigenschwingungen. Die Eigenschwingungen sind mit der Zeit abklingende harmonische Schwingungen. Wir wählen daher für sie den Ansatz:

$$\eta = e^{-p_0 t}\,[A_x \sin \omega_0\, t + B_x \cos \omega_0\, t] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und leiten daraus ab:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = e^{-p_0 t}\,[-(p_0\, A_x + \omega_0\, B_x) \sin \omega_0\, t + (\omega_0\, A_x - p_0\, B_x) \cos \omega_0\, t],$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = e^{-p_0 t}\,\{[(-\omega_0^2 + p_0^2)\, A_x + 2\, p_0\, \omega_0\, B_x] \sin \omega_0\, t + [(-\omega_0^2 + p_0^2)\, B_x - 2\, p_0\, \omega_0\, A_x] \cos \omega_0\, t\}.$$

In die Differentialgleichung (I) eingesetzt, wird mit Weglassung von $e^{-p_0 t}$:

$$A_x^{(4)} \sin \omega_0\, t + B_x^{(4)} \cos \omega_0\, t + \frac{q}{E\,J}\,[-(p_0\, A_x + \omega_0\, B_x) \sin \omega_0\, t + (\omega_0\, A_x - p_0\, B_x) \cos \omega_0\, t]$$
$$+ \frac{\mu}{E\,J}\,\{[(-\omega_0^2 + p_0^2)\, A_x + 2\, p_0\, \omega_0\, B_x] \sin \omega_0\, t + [(-\omega_0^2 + p_0^2)\, B_x - 2\, p_0\, \omega_0\, A_x] \cos \omega_0\, t\}$$
$$- \frac{\gamma}{g\,E}\,\{[(-\omega_0^2 + p_0^2)\, A_x^{(2)} + 2\, p_0\, \omega_0\, B_x^{(2)}] \sin \omega_0\, t + [(-\omega_0^2 + p_0^2)\, B_x^{(2)} - 2\, p_0\, \omega_0\, A_x^{(2)}] \cos \omega_0\, t\} = 0.$$

Daraus folgen die beiden Bedingungsgleichungen:

$$A_x^{(4)} - \frac{q}{E\,J}\,(p_0\, A_x + \omega_0\, B_x) - \frac{\mu}{E\,J}\,[(\omega_0^2 - p_0^2)\, A_x - 2\, p_0\, \omega_0\, B_x]$$
$$+ \frac{\gamma}{g\,E}\,[(\omega_0^2 - p_0^2)\, A_x^{(2)} - 2\, p_0\, \omega_0\, B_x^{(2)}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a)$$

$$B_x^{(4)} - \frac{q}{E\,J}(p_0\,B_x - \omega_0\,A_x) - \frac{\mu}{E\,J}[(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)\,B_x + 2\,p_0\,\omega_0\,A_x]$$
$$+ \frac{\gamma}{g\,E}[(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)\,B_x^{(2)} + 2\,p_0\,\omega_0\,A_x^{(2)}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,\mathrm{b}).$$

Die Gleichungen (12a) und (12b) dienen wieder zur Bestimmung der Funktionen A_x und B_x. Zunächst ordnen wir die Gleichungen nach A_x und B_x:

$$A_x^{(4)} + \frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E}A_x^{(2)} - \frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}A_x - \frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}B_x^{(2)} + \frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}B_x = 0 \quad (12\,\mathrm{a}),$$

$$B_x^{(4)} + \frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E}B_x^{(2)} - \frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}B_x + \frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}A_x^{(2)} - \frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}A_x = 0 \quad (12\,\mathrm{b}).$$

Um daraus z. B. B_x wegzuschaffen, differenzieren wir die beiden Gleichungen (a) und (b) wiederholt nach x, was wir z. B. für die n-malige Differentiation der Gl. (12 b) durch das Symbol $(b)^{(n)}$ ausdrücken und erhalten, wie man leicht nachweist:

$$(a)^{(4)} + \frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}(b)^{(2)} + \frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E}(a)^{(2)} - \frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}(b) - \frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}(a) = 0.$$

Das Ergebnis dieses Verfahrens ist die Differentialgleichung für A_x (und B_x):

$$\left.\begin{aligned} &A_x^{(8)} + A_x^{(6)}\frac{2\,\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E} + A_x^{(4)}\left[-2\frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J} + \left(\frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E}\right)^2\right] \\ &- A_x^{(2)}\left[2\,\frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}\cdot\frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J} + 2\,\frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E}\,\frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}\right] \\ &+ A_x\left[\left(\frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}\right)^2 + \left(\frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}\right)^2\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{VI}).$$

Die weitere Behandlung dieser linearen Differentialgleichung 8. Ordnung ist bekannt. Zunächst hat man die Wurzeln der ihr entsprechenden charakteristischen Gleichung zu bestimmen. Durch Faktorenzerlegung kann man sich davon überzeugen, daß sie nur komplexe Wurzeln hat:

$$\left[w^4 + \left(\frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E} + i\,\frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}\right)w^2 - \left(\frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J} + i\,\frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}\right)\right].$$
$$\left[w^4 + \left(\frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{g\,E} - i\,\frac{2\,\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E}\right)w^2 - \left(\frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J} - i\,\frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}\right)\right] = 0.$$

Führt man zur Abkürzung folgende Identitäten ein:

$$a \equiv \frac{\mu\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2) + q\,p_0}{E\,J}; \quad b \equiv \frac{2\,\mu\,p_0\,\omega_0 - q\,\omega_0}{E\,J}; \quad c \equiv \frac{\gamma\,(\omega_0{}^2 - p_0{}^2)}{2\,g\,E}; \quad d \equiv \frac{\gamma\,p_0\,\omega_0}{g\,E} \quad (13),$$

so findet man zunächst:

$$w^2 = -c \mp i\,d \pm \sqrt{c^2 - d^2 + a \pm i\,(2\,c\,d + b)}.$$

Mit den weiteren Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} &h \equiv c^2 - d^2 + a; && f \equiv 2\,c\,d + b \\ &-c - \sqrt{\frac{\sqrt{h^2 + f^2} + h}{2}} \equiv -m_1; && -d - \sqrt{\frac{\sqrt{h^2 + f^2} - h}{2}} \equiv -n_1 \\ &-c + \sqrt{\frac{\sqrt{h^2 + f^2} + h}{2}} \equiv +m_2; && -d + \sqrt{\frac{\sqrt{h^2 + f^2} - h}{2}} \equiv n_2 \\ &\sqrt{\frac{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2} - m_1}{2}} \equiv p_1; && \sqrt{\frac{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2} + m_1}{2}} \equiv r_1 \\ &\sqrt{\frac{\sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2} + m_2}{2}} \equiv p_2; && \sqrt{\frac{\sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2} - m_2}{2}} \equiv r_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

sind die acht Wurzeln der charakteristischen Gleichung in den Formen enthalten:

$$w_{1,2,3,4} = \pm\,(p_1 \pm r_1\,i), \qquad w_{5,6,7,8} = \pm\,(p_2 \pm r_2\,i),$$

Bei Vernachlässigung der Winkelbeschleunigung ist nur $c = d = 0$ zu setzen. Dann wird aber

$$h = a, \quad f = b, \quad m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad p_1 = r_2 \equiv p, \quad r_1 = p_2 \equiv r.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (VI) lautet also mit den aus den Gleichungen (13) und (14) hervorgehenden Werten p und r und mit den Integrationskonstanten $A_1\,B_1\ldots D_2$

$$A_x = e^{p_1 x}(A_1 \sin r_1 x + B_1 \cos r_1 x) + e^{-p_1 x}(C_1 \sin r_1 x + D_1 \cos r_1 x)$$
$$+ e^{p_2 x}(A_2 \sin r_2 x + B_2 \cos r_2 x) + e^{-p_2 x}(C_2 \sin r_2 x + D_2 \cos r_2 x) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII a)}.$$

Dieselbe Gleichung mit anderen Integrationskonstanten $A_1'\,B_1'\ldots D_2'$ gilt für die Schwingungsform B_x. Die Gesamtlösung kann aber nur acht verschiedene Integrationskonstanten enthalten, so daß die Konstanten der Phase B_x, A_1', $B_1'\ldots$ aus den Konstanten der Phase A_x ableitbar sein müssen. Um diese Beziehungen zu erhalten, setzen wir die Partikulärlösungen der Schwingungsformen A_x und B_x, die wir wieder ohne Zeiger schreiben, in eine der Ausgangsgleichungen, z. B. (12a) ein.

Setzt man dann wieder die Faktoren von

$$e^{px}\sin r x\,, \quad e^{px}\cos r x\,, \quad e^{-px}\sin r x \quad \text{und} \quad e^{-px}\cos r x = 0\,,$$

so erhält man z. B. für A, B, A' und B' die folgenden Beziehungen, wenn man sich der Abkürzungen (13) und (14) bedient:

$$[(p^4 - 6p^2r^2 + r^4 + 2c(p^2 - r^2) - a]A + [4rp(r^2 - p^2) - 4cpr]B = [2d(p^2 - r^2) - b]A' - 4dprB'$$
$$[(p^4 - 6p^2r^2 + r^4 + 2c(p^2 - r^2) - a]B - [4rp(r^2 - p^2) - 4cpr]A = [2d(p^2 - r^2) - b]B' + 4dprA'.$$

Mittels der aus (14) hervorgehenden Bedeutung der Werte p und r findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} p^4 - 6p^2r^2 + r^4 + 2c(p^2 - r^2) - a &= \mp 4dpr \\ 4rp(r^2 - p^2) - 4cpr &= \mp [2d(p^2 - r^2) - b] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15).$$

Dabei gilt auf den rechten Gleichungsseiten der Gl. (15) das obere Zeichen für die Werte p_1, r_1, das untere Zeichen für die Werte p_2, r_2, woraus wieder folgt:

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= -B_1\,, & A_2' &= B_2 \\ B_1' &= A_1\,, & B_2' &= -A_2 \\ C_1' &= D_1\,, & C_2' &= -D_2 \\ D_1' &= -C_1\,, & D_2' &= C_2 \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Schwingungsformen (VIIa) für A_x und (VIIb) für B_x sind damit wieder die gleichen wie die in (IVa) und (IVb) der erzwungenen Schwingungen.

Die Gleichungen (14) für p und r enthalten noch die vorerst unbekannten Größen des Erlöschungsfaktors p_0 und der Eigenfrequenz ω_0, die sich erst aus den Bedingungen der Einspannung und Auflagerung ergeben müssen. Nehmen wir wieder das Beispiel des am einen Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stabes her, wobei das freie Ende die punktförmig angenommene Masse des Unterbrecherbügels m trägt, deren äußerer Dämpfungsfaktor k ist, so erhält man wieder die Bedingungen:

$$\text{für } x = 0\colon\ \eta = 0 \text{ und } \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,,$$

$$\text{für } x = l\colon\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \text{ und } -\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{k'}{EJ}\frac{\partial^3 \eta}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\gamma}{gE}\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2\,\partial x} + \frac{m}{EJ}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{k}{EJ}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0\,.$$

Diese vier Bedingungen liefern acht Phasengleichungen für die acht verschiedenen Integrationskonstanten. Da aber die rechten Gleichungsseiten sämtlich 0 sind, weil bei den Eigenschwingungen die erregende äußere Kraft fehlt, so sind nur die Verhältnisse der Werte $A_1\,B_1\ldots D_2$ bestimmbar und die Verträglichkeit der Gleichungen bei nicht verschwindenden Werten der Integrationskonstanten verlangt, daß die Determinante der acht Gleichungen verschwindet. Diese Determinantengleichung ist die fehlende Periodengleichung für die Werte p_0 und ω_0. Sie muß, da dies zwei Unbekannte für nur eine Gleichung sind, in zwei Gleichungen sich zerlegen lassen. Um dies allgemein nachzuweisen, denken wir uns aus den Bedingungen für das eine Ende (wir wählen dazu das eingespannte Ende) die unbekannten $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ eliminiert. Wir erhalten wieder, wie bei den erzwungenen Schwingungen:

$$2A_2 = A_1 - B_1 - C_1 + D_1 \quad \text{(1a)}, \qquad 2C_2 = -A_1 - B_1 + C_1 + D_1 \quad \text{(2a)},$$
$$2B_2 = -A_1 - B_1 - C_1 - D_1 \quad \text{(1b)}, \qquad 2D_2 = A_1 - B_1 + C_1 - D_1 \quad \text{(2b)}.$$

Mit diesen Werten erhalten die Gleichungen für das andere (freie) Ende die nachfolgenden Formen, indem man für die Phasengleichungen b) nur in den Phasengleichungen a) A_1 durch $-B_1$, B_1 durch A_1, C_1 durch D_1 und D_1 durch $-C_1$ ersetzt und die

Faktoren von $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$, die in Wirklichkeit Funktionen von p_0 und ω_0 sind, allgemein durch $\alpha_1, \beta_1 \ldots \delta_2$ ausdrückt.

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 + \delta_1 D_1 = 0 \quad (3\,a), \qquad \beta_1 A_1 - \alpha_1 B_1 - \delta_1 C_1 + \gamma_1 D_1 = 0 \quad (3\,b),$$
$$\alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 + \delta_2 D_1 = 0 \quad (4\,a), \qquad \beta_2 A_1 - \alpha_2 B_1 - \delta_2 C_1 + \gamma_2 D_1 = 0 \quad (4\,b).$$

Die Determinante dieser Gleichungen $= 0$ gesetzt ist die Periodengleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & -\delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & -\delta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{VIII}).$$

Die Auflösung dieser Determinantengleichung ergibt nach einiger Umformung:

$$[(\alpha_1 + \beta_1)(\gamma_2 + \delta_2) - (\alpha_2 + \beta_2)(\gamma_1 + \delta_1)]^2 + [(\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1)]^2 = 0.$$

Die linke Gleichungsseite stellt die Summe zweier Quadrate vor, die nicht 0 werden kann, wenn nicht jeder der Posten für sich verschwindet; denn die Beizahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind reelle Zahlen. Die Periodengleichung zerfällt also in der Tat in die zwei Gleichungen:

$$(\alpha_1 + \beta_1)(\gamma_2 + \delta_2) - (\alpha_2 + \beta_2)(\gamma_1 + \delta_1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (17\,a),$$
$$(\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (17\,b)$$

oder in Determinantenform geschrieben:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 + \delta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 + \delta_2 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; (17\,a); \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \gamma_1 - \delta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 & \gamma_2 - \delta_2 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; (17\,b).$$

Im allgemeinen wird man die Gleichungen nur durch Probieren lösen können, da die Größen p_0 und ω_0 in Exponential- und trigonometrischen Funktionen vorkommen. In der Praxis wird man die Eigenschwingungsfrequenzen ω_0 und die ihr zugehörigen mittleren Erlöschungsfaktoren p_0, die wegen der nicht zutreffenden Annahme der linearen Abhängigkeit der Dämpfungskraft von der Geschwindigkeit im allgemeinen nicht konstant sind, beobachten und daraus die Werte p und r berechnen. Die Eigenfrequenzen ω_0 kann man auch aus der ungedämpften Schwingung angenähert erhalten, da ja die praktisch vorkommenden Dämpfungen die Frequenzen nur in sehr geringem Grade beeinflussen. Im allgemeinen wird es bei technischen Problemen nur auf den Grundton ankommen. Die Richtigkeit der Annahmen wird schließlich an der Erfüllung der Determinantengleichungen (17 a) und (17 b) geprüft.

5. Die Arbeit der erregenden Kräfte und die Widerstandsarbeit der Dämpfung. Die augenblickliche Größe P_i der an der Masse m oder an der Stelle x der Biegungsfeder wirkenden harmonischen Kraft von der Frequenz ω ist:

$$P_i = A_P \sin \omega t + B_p \cos \omega t = P \sin (\omega t + \delta),$$

wenn A_P, B_P die Phasen, P die Amplitude und δ den Phasenwinkel der Kraft bezeichnet. Der zugehörige Angriffspunkt der Kraft vollführt eine erzwungene Schwingung derselben Periode ω und der augenblickliche Schwingungsausschlag η_i wird dargestellt durch:

$$\eta_i = A_i \sin \omega t + B_i \cos \omega t = C_i \sin (\omega t + \varepsilon_i).$$

A_i, B_i die Phasen, C_i die Amplitude, ε_i der Phasenwinkel des Ausschlages η_i.

Die in einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt geleistete Arbeit ist

$$d\mathfrak{A} = P_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} dt = (A_P \sin \omega t + B_P \cos \omega t)(A_i \cos \omega t - B_i \sin \omega t)\, d\,\omega t$$
$$= P \sin (\omega t + \delta)\, C_i \cos (\omega t + \varepsilon_i)\, d\,\omega t\,.$$

Die bei einer vollen erzwungenen Schwingung von der harmonischen Kraft geleistete Arbeit wird damit

$$\mathfrak{A} = \int\limits_{\omega t = 0}^{2\pi} P_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} dt = \pi (B_P A_i - A_P B_i) = \pi P C_i \sin (\delta - \varepsilon_i) \quad . \; . \; . \quad (18).$$

Die Summe der von sämtlichen erregenden Kräften gleicher Periode geleisteten Arbeiten muß, da die Dämpfungen die einzigen Widerstandskräfte sind, gleich der gesamten Widerstandsarbeit der äußeren und inneren Dämpfungskräfte sein, die sich in Wärme umsetzt.

Die Arbeit der äußeren Dämpfung an der Masse m mit dem äußeren Dämpfungsfaktor k bei einer vollen Schwingung ist:

$$\mathfrak{A}_1 = \int_{\omega t = 0}^{2\pi} \left(k \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t}\, d t = \pi\, k\, \omega\, (A_i^2 + B_i^2) = \pi\, k\, \omega\, C_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Die Arbeit der an der Biegungsfeder wirkenden äußeren Dämpfung mit dem auf die Längeneinheit bezogenen Dämpfungsfaktor q ist für eine volle Schwingung:

$$\mathfrak{A}_2 = \int_{\omega t = 0}^{2\pi} \int_{x=0}^{l} \left(q \frac{\partial \eta}{\partial t}\, d x\right) \frac{\partial \eta}{\partial t}\, d t = \pi\, q\, \omega \int_{x=0}^{l} (A_x^2 + B_x^2)\, d x ,$$

wenn der Dämpfungsfaktor q auf die ganze Federlänge unveränderlich ist, wie wir dies ja auch für unsere Rechnung angenommen haben. Setzen wir die Werte A_x und B_x ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 = \pi\, q\, \omega \Big\{ & \frac{A_1^2 + B_1^2}{2\, p_1} (e^{2 p_1 l} - 1) + \frac{B_1 D_1 - A_1 C_1}{r_1} \sin 2\, r_1 l + \frac{A_1 D_1 + B_1 C_1}{r_1} (1 - \cos 2\, r_1 l) \\
& \qquad + \frac{C_1^2 + D_1^2}{2\, p_1} (1 - e^{-2 p_1 l}) \\
& + \frac{A_2^2 + B_2^2}{2\, p_2} (e^{2 p_2 l} - 1) + \frac{B_2 D_2 - A_2 C_2}{r_2} \sin 2\, r_2 l + \frac{A_2 D_2 + B_2 C_2}{r_2} (1 - \cos 2\, r_2 l) \\
& \qquad + \frac{C_2^2 + D_2^2}{2\, p_2} (1 - e^{-2 p_2 l}) \\
& + 2 \frac{B_1 B_2 - A_1 A_2}{(p_1 + p_2)^2 + (r_1 + r_2)^2} \left[e^{(p_1 + p_2) l} ((p_1 + p_2) \cos (r_1 + r_2) l + (r_1 + r_2) \sin (r_1 + r_2) l) - (p_1 + p_2)\right] \\
& + 2 \frac{A_1 B_2 + B_1 A_2}{(p_1 + p_2)^2 + (r_1 + r_2)^2} \left[e^{(p_1 + p_2) l} ((p_1 + p_2) \sin (r_1 + r_2) l - (r_1 + r_2) \cos (r_1 + r_2) l) + (r_1 + r_2)\right] \\
& + 2 \frac{B_1 D_2 + A_1 C_2}{(p_1 - p_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} \left[e^{(p_1 - p_2) l} ((p_1 - p_2) \cos (r_1 - r_2) l + (r_1 - r_2) \sin (r_1 - r_2) l) - (p_1 - p_2)\right] \\
& + 2 \frac{A_1 D_2 - B_1 C_2}{(p_1 - p_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} \left[e^{(p_1 - p_2) l} ((p_1 - p_2) \sin (r_1 - r_2) l - (r_1 - r_2) \cos (r_1 - r_2) l) + (r_1 - r_2)\right] \\
& + 2 \frac{D_1 B_2 + C_1 A_2}{(p_2 - p_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \left[e^{(p_2 - p_1) l} ((p_2 - p_1) \cos (r_2 - r_1) l + (r_2 - r_1) \sin (r_2 - r_1) l) - (p_2 - p_1)\right] \\
& + 2 \frac{D_1 A_2 - C_1 B_2}{(p_2 - p_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \left[e^{(p_2 - p_1) l} ((p_2 - p_1) \sin (r_2 - r_1) l - (r_2 - r_1) \cos (r_2 - r_1) l) + (r_2 - r_1)\right] \\
& + 2 \frac{D_1 D_2 - C_1 C_2}{(p_1 + p_2)^2 + (r_1 + r_2)^2} \left[e^{(-p_1 - p_2) l} (-(p_1 + p_2) \cos (r_1 + r_2) l + (r_1 + r_2) \sin (r_1 + r_2) l) + (p_1 + p_2)\right] \\
& + 2 \frac{C_1 D_2 + D_1 C_2}{(p_1 + p_2)^2 + (r_1 + r_2)^2} \left[e^{(-p_1 - p_2) l} ((p_1 + p_2) \sin (r_1 + r_2) l + (r_1 + r_2) \cos (r_1 + r_2) l) - (r_1 + r_2)\right] \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Die Arbeit der inneren Dämpfung wird

$$\mathfrak{A}_3 = \int_{\omega t = 0}^{2\pi} \int_{x=0}^{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k' \frac{\partial^3 \eta}{\partial t\, \partial x^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) d t\, d x + \int_0^{2\pi} \int_0^{l} \left(k' \frac{\partial^3 \eta}{\partial t\, \partial x^2}\, d x\right) \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t\, \partial x}\, d t ,$$

da die innere Dämpfungskraft sowohl einen Weg $\frac{\partial \eta}{\partial t}\, d t$ als auch ihr Moment einen Winkel $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) d t$ zurücklegt. Nach Integration über x ergibt sich:

$$\mathfrak{A}_3 = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[k' \frac{\partial^3 \eta}{\partial t\, \partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}\right]_{x=l} - \left[k' \frac{\partial^3 \eta}{\partial t\, \partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial t}\right]_{x=0} \right\} d t + \int_0^{2\pi} \frac{k'}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t\, \partial x}\right)^2_{x=l} - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t\, \partial x}\right)^2_{x=0}\right] d t \quad (21).$$

Für unser Beispiel des an einem Ende eingespannten, am anderen freien Stabes wird, da $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ für $x = l$ unabhängig von der Zeit $= 0$ und da für $x = 0$ ebenso $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ ist, das erste Integral verschwinden und im zweiten Integral wird wegen $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ unabhängig

von der Zeit der zweite Posten wieder $= 0$, so daß sich für unser Beispiel die Arbeit der inneren Dämpfung berechnet zu:

$$\mathfrak{A}_3 = \int_0^{2\pi} \frac{k'}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \, \partial x}\right)^2_{x=l} d t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20\,\mathrm{a}).$$

Bei den freien oder Eigenschwingungen vermindert die Dämpfarbeit die Energie des schwingenden Systems, was zum Erlöschen der Ausschläge führt. Die Energie E_0 setzt sich zusammen aus der kinetischen und potentiellen Energie der Einzelmassen und der Federmassen und aus der potentiellen Energie der Biegungsfedern. Für Schwingungen in horizontaler Ebene ist:

$$\left.\begin{aligned} E_0 = \frac{1}{2} \Sigma \left[m \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \right] + \frac{1}{2} \int_0^l \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 d x + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma}{g} J \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \, \partial x}\right)^2 d x \\ + \frac{1}{2} \int_0^l E J \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2 d x + \text{konst.} \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Die Abnahme der Energie $(E_0)_{\omega t = 0} - (E_0)_{\omega t = 2\pi}$ ist die bei einer Schwingung geleistete, mit der Zeit veränderliche Gesamtdämpfungsarbeit, die sich natürlich ebenso auch aus den Arbeiten der einzelnen Dämpfungsarten errechnen läßt, was aber im allgemeinen zu verwickelten Formeln führt, die man nur im Bedarfsfalle ermitteln wird. 851

Die mehrfach geführten Wellen in mehreren fließenden Mitteln.

Von **KARL ULLER** in Gießen.

Einleitung. Wenn eine Flüssigkeit oder ein Gas zwei Begrenzungen hat — sei es eine feste oder eine freie —, dann läßt sich die von den beiden Unstetigkeitsflächen geführte Welle nicht mehr in der idealisierten Form einer Planwelle darstellen, weil die eine Fläche auf den Bau der Welle an der anderen einwirkt. Berühren sich gar außerdem noch mehrere flüssige Mittel und kommt an ihnen eine mehrfach geführte Welle zustande, dann ist es infolge der Einwirkungen aller U-Flächen auf einen Wellenteil an einer der U-Flächen erst recht unmöglich, die mehrfach geführte Welle aus Planwellenstücken zusammenzusetzen, selbst wenn man von der Veränderlichkeit des Wellenbaues in ihrem ganzen Verlauf absieht. Die Beschränkung auf Planwelligkeit, die den Grundformeln im 4. Abschnitt einer Abhandlung [1]), deren Erweiterung die vorliegende ist, unterliegt, müssen wir also in diesen Fällen aufgeben. Auch kommen dann erst alle Gesetze ans Tageslicht, die diesen geführten Wellen eignen. Die Formeln, die sich aus der Notwendigkeit der Verallgemeinerung ergeben, sind freilich selbst bei idealen Flüssigkeiten ungemein verwickelt, was erst voll in die Erscheinung tritt, wenn man sie auf eine bestimmte Aufgabe anwenden soll. Diese Verwickeltheit schon in erster Annäherung liegt eben im Wesen des Problems, das auf keine andere und etwa einfachere Weise dargestellt werden kann. Die bisherigen Lösungsverfahren beziehen sich auf wenige, wesentlich einfachere Aufgaben und sind auch dann mit geringen Ausnahmen nicht haltbar, wie weiter unten schon an einem sehr einfachen Beispiele dargetan werden kann. Das liegt an Annahmen, die gemacht werden mußten. Sie sind wohl zu unterscheiden von Vernachlässigungen, deren auch wir, ohne auf das Wesentliche verzichten zu müssen, uns bedienen, aber nur um nicht in Mammut-Formeln zu gipfeln.

Die vorliegende Darstellung, die auch für die Physik der Atmosphären von Bedeutung ist, gibt zunächst einmal das Rahmenwerk. Es wird vieler mühevoller Einzelarbeiten bedürfen, um es einigermaßen auszufüllen und eine Reihe von praktisch wichtigen Aussagen machen zu können.

1. Die Bedingungen für eine geführte Welle von elementarer Schwankungsform an einer Unstetigkeitsfläche. Wir nehmen jetzt verallgemeinernd eine Reihe von beliebigen U-Flächen mit den Normalen $\mathfrak{k}$ an. Die rein hydrodynamische

[1]) K. Uller, Die geführten Schwerewellen an der Grenze zweier fließenden Mittel, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 129 bis 136, im folgenden mit I bezeichnet.

Ueber den Begriff der Planwelligkeit siehe K. Uller, Die Entwicklung des Wellenbegriffes I, Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. XVIII (1928), S. 398 bis 414.

Welle von elementarer Schwankungsform in einem homogenen Mittel von der Dichte D, das die konstante Flußgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat, ist nach I § 3 von der Form

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{r};t) = \mathbf{grad}\,\Omega(\mathfrak{r};t) = \mathfrak{v} - {}^1/_2\{i\,\omega\,\mathfrak{w}\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} - i\,\omega^*\,\mathfrak{w}^*\cdot e^{-i(\nu^* t-\Phi^*)}\} \quad . \quad (1)$$

mit

$$\omega = \text{konst.} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2); \qquad \mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wenn wir zu der letztgenannten Beziehung den konjugiert komplexen Ausdruck addieren bzw. subtrahieren, bekommen wir $\mathfrak{w}'^2 - \mathfrak{w}''^2 = \mathrm{div}\,\mathfrak{w}''$; $2(\mathfrak{w}'\,\mathfrak{w}'') = -\mathrm{div}\,\mathfrak{w}'$, so daß

$$(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}^*) = \mathfrak{w}'^2 + \mathfrak{w}''^2 = \sqrt{\mathrm{div}^2\,\mathfrak{w}'' + \frac{\mathrm{div}^2\,\mathfrak{w}'}{\cos^2\vartheta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3'),$$

wenn ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ bezeichnet.

An der Fläche, in der sich zwei Wellenträger berühren, gelten für beliebige Wellen die aus der Kohärenz hervorgehenden beiden wellenkinematischen Effekte

$$\mathfrak{w}_{1t} = \mathfrak{w}_{2t} \quad (\text{Huyghens-Effekt}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

indem wir wieder mit dem Zeiger t die Tangentialkomponente eines Vektors andeuten, und

$$\nu_1 - \nu_2 = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\{(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) - (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})\} \quad (\text{Doppler-Effekt}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Aus letzterem ergibt sich

$$\mathbf{grad}_t\,(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = \mathbf{grad}_t\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

auch wenn $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})$ unendlich klein ist. Nun ist allgemein

$$(\mathfrak{k}\,\nabla)\,\mathfrak{A}_t + (\mathfrak{A}_t\,\nabla)\,\mathfrak{k} = -[\mathfrak{A}_t\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] - [\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}] + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{k})\,[\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}] + \mathbf{grad}_t\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{k}),$$

so daß

$$(\mathfrak{k}\,\mathbf{grad}\,\mathfrak{w}_{1t}{}^2) + (\mathfrak{k}\,\mathbf{grad}\,\mathfrak{w}_{2t}{}^2) = -2\,(\mathfrak{w}_t\,(\mathfrak{w}_t\,\nabla)\,\mathfrak{k}) + 2\,\{(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})\}\,([\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k})$$
$$+ 2\,(\mathfrak{w}_t\,\mathbf{grad}_t\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Für physikalische Grenzbedingungen brauchen wir unumgänglich die substantiellen Werte, die wir nach dem Schema

$$\mathfrak{A}_s - \mathfrak{A}_0 = \int_{t_0}^{t} d\,t' \left\{\frac{\partial\,\mathfrak{A}(\mathfrak{r}';t')}{\partial\,t'} + (\mathfrak{V}\,\nabla)_{t'}\,\mathfrak{A}(\mathfrak{r}';t')\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

berechnen und, wie früher auseinandergesetzt, nur für ein Zeitelement in Anspruch nehmen. Für die geschweifte Klammer ist derjenige Wert einzusetzen, der bei Ankunft t' des Teilchens in $\mathfrak{r}'$ vorliegt.

Wir setzen wieder angenähert richtig $\mathfrak{r}' \simeq \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}\,(t - t_0)$ und $\Phi' \simeq (\mathfrak{w}'\,\mathfrak{r}') + \text{konst.}$, so daß

$$\nu\,t' - \Phi' \simeq \{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}')\}\,t' - (\mathfrak{w}',\,\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{v}\,t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Damit kommt in Annäherung

$$\mathfrak{w}_s \simeq \mathfrak{w} + t\,(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w} - \frac{1}{2}\left\{\frac{i\,\omega\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}^2}{2\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}}\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\mathfrak{V}_s \simeq \mathfrak{v} - \frac{1}{2}\left\{i\,\omega\left[\mathfrak{w} - i\,\frac{(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w}}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})}\right]\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11);$$

anders wie bei der Planwelle unterscheiden sich jetzt $\mathfrak{w}_s$ und $\mathfrak{V}_s$ merklich von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{V}$.

Ferner ist wie früher

$$\frac{P}{D} \simeq \Pi - \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,t} - (\mathfrak{v}\,\mathbf{grad}\,\Omega) + \text{konst.} \simeq \Pi - \mathfrak{v}^2 - \frac{1}{2}\left\{i\,\omega\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} + \ldots\right\},$$

so daß nach (8) bei konstantem $\mathbf{grad}\,\Pi$

$$\frac{P_s}{D} \simeq \text{konst.} + (\mathfrak{v}\,\mathbf{grad}\,\Pi)\,t - \frac{1}{2}\left\{i\,\omega\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\omega\,\frac{(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\Pi) - (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}))}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})}\cdot e^{i(\nu t-\Phi)} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad (12),$$

wenn die örtliche Veränderlichkeit von $\mathfrak{w}$ wieder nur in roher Annäherung berücbsichtigt wird. Wir sehen: Die Abweichung von der Planwelligkeit übt auf $\mathfrak{V}_s$ und P_s nur dann einen merklichen Einfluß aus, wenn eine Flußgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vorhanden ist.

In unseren Beziehungen können wir vermöge (3) auch schreiben

$$\mathbf{grad}\,\mathfrak{w}^2 = -i\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}, \qquad \mathbf{grad}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w} = i\,\mathfrak{w}^2\cdot\mathfrak{v} - \mathbf{rot}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] \quad (13).$$

An einer U-Fläche, wo zwei fließende Mittel aneinander gleiten, verlangt die Stetigkeit von $(\mathfrak{V}_s \mathfrak{k})$ daselbst nach (11) für die beiden Flüsse $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})$ stetig, und für die beiden kohärenten Wellenflanken $(\nu_1; \mathfrak{w}_1)$ und $(\nu_2; \mathfrak{w}_2)$

$$\omega \left[(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) - i \frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v} \bigtriangledown)\,\mathfrak{w})}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})} \right] = \text{stetig.}$$

Nun existiert aber in einer geführten Welle an zwei benachbarten Mitteln, wie in I § 4 schon bei der geführten Planwelle bewiesen ist, der Potentialsprung

$$\omega_1 = -\,\omega_2 \quad . \;.\; . \quad (14), \qquad \text{so daß} \qquad (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{k}) \quad . \;.\; . \quad (15)$$

und

$$(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) - i \frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}_1 \bigtriangledown)\,\mathfrak{w}_1)}{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)} = -\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) + i \frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}_2 \bigtriangledown)\,\mathfrak{w}_2)}{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)} \quad . \;.\; .\; . \quad (16).$$

Beachten wir, daß $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = -\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}] + (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}] + (\mathfrak{v}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}])\,\mathfrak{k}$, so liefert (13)

$$(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v} \bigtriangledown)\,\mathfrak{w}) = i\,\mathfrak{w}^2\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]) + (\mathfrak{v}_t\,\mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) \quad . \;.\; . \quad (17').$$

Wir können aber auch durch direkte Zerlegung von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ finden

$$(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v} \bigtriangledown)\,\mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}_t\,\mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) - (\mathfrak{v}_t\,(\mathfrak{w}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,([\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) \quad (17'').$$

Aus beiden ergibt sich mit (3) die Kontrollformel

$$-\,(\mathfrak{v}_t\,(\mathfrak{w}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k}) = -\,(\mathfrak{w}_t\,(\mathfrak{v}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{k} \quad . \;.\; .\; . \quad (18),$$

die verrät, daß die Flächen $(\mathfrak{k})$ nicht stark gekrümmt sein dürfen; denn für $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}) = 0$ verschwindet $(\mathfrak{v}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k}$, wie zu erwarten war, da wir $\mathfrak{v}$ durchweg als konstant behandelt haben, was natürlich bei gekrümmten Flächen in Strenge unmöglich ist. Zu demselben Schluß, nämlich daß

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{k} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{v}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k} = \text{klein} \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (18')$$

sein müssen, führt die Ueberlegung, daß $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})$ sicher stets unstetig ist, die linke Seite von (18) aber stetig sein kann, nämlich wenn beide Flüsse gleiche Geschwindigkeit aufweisen.

Wenn $\mathfrak{v}_1 = 0 = \mathfrak{v}_2$, liefert (16) direkt

$$(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = 0 \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (16')$$

und somit auch $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})^2 = (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})^2$. Durch beiderseitige Addition der stetigen Größe $\mathfrak{w}_t^2$ kommt

$$\mathfrak{w}_1^2 = \mathfrak{w}_2^2 \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (19)$$

und weiter wegen (3)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_1 = \mathrm{div}\,\mathfrak{w}_2 \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (20).$$

Da nun aber $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_t = \mathrm{div}\,[\mathfrak{k}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]] = ([\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) - (\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}])$ stetig ist, so muß $\mathrm{div}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{k} = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{k} + (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}))$ stetig sein, so daß wegen (16')

$$(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})) + (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})) = 0 \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; . \quad (21)$$

und weiter

$$\mathrm{div}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{k} = 0 = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{k} + (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (22).$$

Die Beziehung (16') hat aber zur anderen Folge, daß wegen (6)

$$\mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = 0 = \mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (23),$$

also $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = -\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = $ konst. längs ein und derselben Trennfläche zweier Mittel. Und weiter

$$\mathrm{grad}_t\,\mathfrak{w}_t^2 = \mathrm{grad}_t\,\mathfrak{w}^2 = -\,i\,\mathrm{grad}_t\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = -\,i\,\mathrm{grad}_t\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{k}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]] \quad . \;. \quad (24),$$

sowie nach (7)

$$(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}_{1\,t}^2) + (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}_{2\,t}^2) = -\,2\,(\mathfrak{w}_t\,(\mathfrak{w}_t \bigtriangledown)\,\mathfrak{k}) \quad . \;.\; .\; .\; . \quad (25),$$

was eine kleine Größe ist. Zwischen $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})^2$ und $\mathfrak{w}_t^2$ besteht nach der Wellengleichung (3) und nach (22) an U die Beziehung

$$(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})^2 = -\,\mathfrak{w}_t^2 + i\,(\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]) - i\,([\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) \quad . \;.\; .\; .\; . \quad (26)$$

in Gestalt einer Differentialgleichung.

Denken wir uns hieraus $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})$ und $(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})$ entnommen und in die später noch anzugebende Druckgleichung (mit $\mathfrak{v} = 0$) eingesetzt, so liefert diese die Fundamentalgröße $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$, womit dann, wenn die Richtungen von $\mathfrak{w}_t'$ und $\mathfrak{w}_t''$ bekannt sind, $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ angebbar sind, und somit schließlich auch $\mathfrak{V}_{1s}$ und $\mathfrak{V}_{2s}$ bis auf eine Konstante, sowie außerdem der Doppler-Effekt $\nu_1 - \nu_2$, der für jeden Standort existiert, der nicht in der U-Fläche selbst liegt.

Das gleiche Lösungsziel muß aber auch zu erreichen möglich sein, wenn die Flußgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2 \neq 0$ sind, von welchen aber die Beziehungen (4), (6) und (26) unabhängig sind. Verlangt werden beiderseits und längs U die 5 Größen $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})$; $(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})$;

$\sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$; $(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}))$; $(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}))$, wodurch dann $\mathfrak{w}$ und $\mathrm{grad}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w}$ nach (17) und (13) angebbar sind, Größen, die nach (11) und (12) auch nötig sind zur Darstellung von $\mathfrak{V}_s$ und P_s. Zur Verfügung stehen aber an U nur 4 Differentialgleichungen, nämlich je eine von der Form (26) für jedes der beiden Mittel — wobei wir rechtsseitig $-i\,\mathrm{div}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}$ wieder anzufügen haben —, sowie (16) und die alsbald anzuschreibende Druckgleichung; die Gl. (6) gibt nur eine Koppelung der Differentialquotienten von $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})$ und $(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})$. Daraus geht hervor, daß entweder Gl. (16) oder die Druckgleichung zerfallen muß. Wir können zeigen, daß ersteres der Fall ist. Wir setzen also

$$(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16'')$$

und

$$\frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}_1\,\nabla)\,\mathfrak{w}_1)}{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)} + \frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}_2\,\nabla)\,\mathfrak{w}_2)}{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16''').$$

Da nun (16'') identisch ist mit (16'), so sind auch die Folgerungen identisch. Demzufolge ist gemäß (17') $(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w})$ stetig. Dann aber muß nach (16''') $(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w})$ verschwinden. In der Tat ist nach (17') mit Rücksicht auf (3), (22) und (23)

$$(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w}) = (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,([\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}) \simeq 0 \quad \ldots \ldots \quad (16''''),$$

denn (18') entsprechend muß $\mathrm{rot}\,\mathfrak{k}$ eine kleine Größe sein. Diese angenäherte statt strenge Erfüllung kommt aber nur daher, daß wir durchweg $\mathfrak{v}$ als konstant behandelt haben, was natürlich bei gekrümmten Flächen in Strenge unmöglich ist. Auch ohne die Einschränkung (18') läßt sich unsere Aufgabe auf gleichem Wege streng lösen, nur werden die Formeln viel verwickelter. Es gelten also die Formeln (16') bis (26) auch im Falle, daß beliebige Flußgeschwindigkeiten existieren. Man sieht nun, wie nützlich es war zuerst die geführte Planwelle darzustellen.

Hervorzuheben ist das Ergebnis: Längs ein und derselben Trennfläche zweier fließender Mittel haben in der geführten Welle $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = -(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})$ sowie $\omega_1\,(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = \omega_2\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})$ einen konstanten Wert, abhängig infolge der Druckbedingung von den beiden Flußgeschwindigkeiten, den beiden Dichten, der Kapillarkonstanten sowie von der Frequenz und Dämpfung der Welle. Dieser wichtige Satz ist eine Folge des Potentialsprunges in einer geführten Welle und des Doppler-Effektes; er unterliegt einstweilen noch der Voraussetzung, daß die Wellenform von konstantem Typ ist entsprechend dem Ansatz (1).

In dem Satze spricht sich deutlich eine Führung der Welle durch die U-Fläche aus. Die erwähnte Konstanz bedeutet natürlich nicht, daß die Amplitude von $(\mathfrak{V}\,\mathfrak{k})$ längs U konstant sei. Denn da $\mathfrak{w}$ komplex, existiert nach (1) neben der normal gerichteten auch eine tangentiale Verlöschung, und zwar in rein exponentialer Form. Der Aus- und Einlauf einer beispielsweis axialsymmetrischen, geführten Welle geschieht also keineswegs nach Zylinderfunktionen. Jede beobachtete Abweichung von der angegebenen Amplitudenabnahme bei der Fortpflanzung ist auf Reibung und andere Einflüsse zu schieben. Vielfach ist nach (24) auch $\mathfrak{w}_t^2$ längs der U-Fläche konstant. Dann gilt das gleiche auch für $\mathfrak{w}^2$ und $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$, im scharfen Gegensatz zu der freien Welle, in der mit zunehmendem Abstande von der Quelle $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}$ allmählich verschwinden.

Schließlich verlangt die Druckbedingung $P_{2s} - P_{1s} = -c_{12}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{k}'$, worin c_{12} die Kapillarkonstante und $\mathrm{div}\,\mathfrak{k}'$ die mittlere Krümmung der gewellten Fläche bezeichnet. Für letztere bekommen wir wieder angenähert

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{k}' \simeq -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\omega\,\mathfrak{w}_t^2}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})}\left[(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) - i\,\frac{(\mathfrak{k}\,(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w})}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})}\right]\cdot e^{i(\nu t - \Phi)} + \ldots\right\} \quad . \; . \quad (27),$$

nachdem wir wieder die Normalverschiebung eines Punktes von U, nämlich $\zeta - \zeta_0 = \int dt\,(\mathfrak{V}_s\,\mathfrak{k})$ mit Hilfe von (15) in I § 3 angenähert berechnet haben; man verbessere dort die Druckfehler $(\mathfrak{V}\,\mathfrak{k})$ statt $(\mathfrak{V}_s\,\mathfrak{k})$ und (16) statt (15). Mit Rücksicht auf (12), (14), (16'''') und (23) wird nun

$$\left.\begin{aligned} & D_2\left\{\frac{(\mathfrak{w}_2\,\mathrm{grad}\,\Pi_2) - (\mathfrak{v}_{2t}\,\mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{v}_{2t}\,\mathfrak{w}_t))}{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)} + i\,\{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)\}\right\} \\ + & D_1\left\{\frac{(\mathfrak{w}_1\,\mathrm{grad}\,\Pi_1) - (\mathfrak{v}_{1t}\,\mathrm{grad}_t\,(\mathfrak{v}_{1t}\,\mathfrak{w}_t))}{\nu_1 - \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)} + i\,\{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)\}\right\} \\ + & c_{12}\,\frac{\mathfrak{w}_t^2}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})}\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (28);$$

dabei kann $(\mathfrak{v}_t \operatorname{grad}_t (\mathfrak{v}_t \mathfrak{w}_t))$ im Hinblick auf die Identität (13) mit $\operatorname{rot}_t [\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}] = -[\mathfrak{k} \operatorname{rot} \mathfrak{w}_t] - 2(\mathfrak{w}_t \nabla)\,\mathfrak{k} + \mathfrak{w}_t \operatorname{div} \mathfrak{k}$ auch auf die Form gebracht werden

$$(\mathfrak{v}_t \operatorname{grad}_t (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})) = i\,\mathfrak{w}^2 \cdot \mathfrak{v}_t^2 + ([\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}] \operatorname{grad}_t (\mathfrak{v}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}])) - (\mathfrak{v}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}])\,(\mathfrak{v}_t \operatorname{rot} \mathfrak{k})$$
$$+ (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,([\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}] \operatorname{rot} \mathfrak{k}) + \{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}_t \mathfrak{w}_t) + (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})\,[\mathfrak{v}_t^2 + 2\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})^2]\} \operatorname{div} \mathfrak{k} \quad . \quad (29),$$

worin aber nur die beiden ersten Glieder von Gewicht sind.

Außerdem verlangt (12) noch

$$D_2\,(\mathfrak{v}_2 \operatorname{grad} \Pi_2) - D_1\,(\mathfrak{v}_1 \operatorname{grad} \Pi_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Sehr zu beachten ist die Feststellung, daß an der Berührungsfläche je zweier Mittel oder je zweier Teile ein und desselben Mittels mit verschiedenen Flußgeschwindigkeiten das Geschwindigkeitspotential einer geführten Welle stets einen Sprung ins entgegengesetzte Vorzeichen aufweist, und daß deshalb mit Rücksicht auf (4) daselbst stets Gleitung, verursacht durch diese Welle, statthat. Gleitung deutet aber in einer wirklichen Flüssigkeit auf Wirbelbildung hin, wobei neben der Zähigkeit auch die Dichte und die Flußgeschwindigkeit beider Mittel eine Rolle spielt. Eine geführte Welle der Fluidik ist eine Ursache von Wirbelbildung; in Atmosphären-Schichten entstehen so elektrische Ladungen. — Weiter folgt aus der Existenz der Zeichenumkehr von ω beim Durchgang durch die U-Fläche, daß man nicht erwarten darf, mit unseren Gleichungen für eine gebundene Welle im Grenzfalle $c_{12} = 0$, $D_1 = D_2$, $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ die Welle in einem homogenen, ruhenden Mittel ohne U-Fläche zu erhalten. Denn der Vorzeichenwechsel an der vormaligen, ausgeprägten U-Fläche bleibt bei diesem Grenzübergang erhalten. In dem genannten Grenzfall wird $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = -(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = \pm\infty$, d. h. es existiert eine geführte Welle von unendlich kleinem Betrage und ebensolcher Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Verzweigt sich die Trennfläche, indem ein drittes Mittel hinzutritt oder Teile ein und desselben Mittels verschiedene Geschwindigkeiten haben, so entstehen an den Verzweigungslinien nach obigem notwendig Unstetigkeiten von $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})$, $\mathfrak{w}_t^2$ und ω, was Reflexionen von geführten Wellen zur Folge hat, die von den ankommenden geführten Wellen gespeist werden. Alle die erwähnten Gesetze ist das bisherige Verfahren ganz außerstande ans Licht zu heben.

An einer freien Oberfläche haben wir für eine geführte Welle nur die Druckbedingung $P_{1s} = 0$; $P_{2s} = -c \operatorname{div} \mathfrak{k}'$, also nach (12) und (27) neben

$$(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \Pi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30')$$

$$\frac{(\mathfrak{w} \operatorname{grad} \Pi) - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}))}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})} + i\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\} + \frac{c}{D}\,\frac{\mathfrak{w}_t^2}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})} \left\{ (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) - i\,\frac{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w})}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})} \right\} = 0 \quad (28').$$

Diesen Ausdruck hätten wir auch aus der Druckbedingung (28) für die Zweimittel-Welle herleiten können, indem wir dort $D_1 = 0$ setzten. Da in den übrigen Bedingungen der Zweimittel-Welle die Dichte nicht vorkommt, so können wir — es liegt nahe, so zu schließen — uns den angrenzenden leeren Raum mit einem flüssigen Mittel von unendlich kleiner Dichte erfüllt denken. Dann ist unsere Oberfächen-Welle identisch mit der Zweimittel-Welle an dieser Trennfläche. Dieser Schluß ist aber verfehlt. Denn für eine einflankige Oberflächen-Welle gibt es keine Wellenkohärenz-Bedingungen (4) und (5) mit ihren weitreichenden Folgerungen. Die Oberflächen-Welle ist somit grundsätzlich verschieden von der gebundenen Welle an zwei Mitteln, von denen das eine eine äußerst geringe Dichte hat. Zwar wird auch sie geführt, indem sie die Bedingung (28') an U zu erfüllen hat, jedoch bei weitem nicht so straff, wie die Folgerungen (16') bis (26) für die Zweimittel-Welle verraten. — Es sei die Oberfläche eine Niveaufläche, so daß $(\mathfrak{w}_t \operatorname{grad}_t \Pi) = 0$, und außerdem das Mittel in Ruhe $(\mathfrak{v} = 0)$. Dann verlangt (28')

$$\left\{ (\mathfrak{k} \operatorname{grad} \Pi) + \frac{c}{D}\,\mathfrak{w}_t^2 \right\} \operatorname{grad}_t (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) + \frac{c}{D}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) \operatorname{grad}_t \mathfrak{w}_t^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Es ist hier nun nicht, wie bei der Zweimittel-Welle, $\operatorname{grad}_t (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) = 0$ und infolgedessen $\mathfrak{w}_t^2 = \text{konst.}$, also $\mathfrak{w}^2 = \text{konst.}$ längs U.

An einer starren Begrenzung haben wir für eine geführte Welle nur die Geschwindigkeits-Bedingung $(\mathfrak{V}_s - \mathfrak{v}, \mathfrak{k}) = 0$, mithin gemäß (11) und (17')

$$\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{w}^2 - i\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{k} \operatorname{rot} [\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]) - i\,(\mathfrak{v}_t \operatorname{grad}_t (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})) = 0 \quad . \quad (32);$$

sie ist nicht aus (28) zu gewinnen, indem man $D_2 = \infty$ setzt.

Man erkennt, daß die Grenzbedingungen an den drei möglichen U-Flächen nicht ineinander übergehen können. Wir dürfen daher nicht erwarten, daß Aufgaben mit mehreren Mitteln sich zu solchen mit weniger Mitteln spezialisieren lassen.

Wir sind nun imstande, die dichtbeständige Welle in einem Fluß, an einer Woge, in einer Wasserglocke oder in bewegten Atmosphären-Schichten wiederzugeben, ohne Annahmen, wenn auch mit Vernachlässigungen, Aufgaben, die bisher der einwandfreien Analyse widerstanden. Selbstverständlich liefert die Kenntnis der Bedingungen an den U-Flächen noch nicht ohne weiteres die strenge Darstellung der Welle in allen Feldpunkten. In der Atmosphäre sind zwar die Dichtenunterschiede gering, jedoch können die Flußgeschwindigkeiten erheblich differieren. Von einigen ganz spezialisierten Unterfällen abgesehen, ist es unmöglich, die mehrfach geführten Wellen durch Standwechsel von Stationarität aus zu gewinnen. Am besten veranschaulichen das einfache Beispiele.

2. Zwei einfache Aufgaben. In ihnen setzen wir voraus, daß $\mathfrak{w}_t'$ und $\mathfrak{w}_t''$ parallel sind, wie es vielfach der Fall ist, so daß $[\mathfrak{w}_t\, \mathfrak{w}_t^*] = 0$.

a) Eine Flüssigkeit ruhe über einem ebenen, horizontalen und festen Boden ($z = z_0$) im Schwerefelde und habe ungestört die freie Oberfläche ($z = 0$). Die von den beiden U-Flächen geführte Welle sei darzustellen.

Die z-Richtung falle wie früher mit $\mathfrak{k}$ zusammen und gehe parallel grad Π nach unten. Wenn $\mathfrak{w}_t$ die Richtung von x hat, dann hat in einem Rechtssystem $[\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}]$ die Richtung von $-y$, folglich ist $(\mathfrak{k} \operatorname{rot} [\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}]) = \frac{\partial [\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}]_y}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{w}_t}{\partial x}$, so daß im Innern nach (3) § 1 wegen $\operatorname{div} \mathfrak{k} = 0 = \operatorname{rot} \mathfrak{k}$ erfüllt sein muß

$$\left\{ \frac{\partial (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})}{\partial z} - i (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial \mathfrak{w}_t}{\partial x} - i\, \mathfrak{w}_t^2 \right\} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

An der Oberfläche U_1, wo $z = 0$, muß nach (28') § 1, $(\mathfrak{k} \operatorname{grad} \Pi) = g$ gesetzt, gelten

$$(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}) \left\{ g + \frac{c}{D}\, \mathfrak{w}_t^2 \right\} + i\, \nu^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

und am Boden U_2, wo $z = z_0$, nach (32) ebenda

$$(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Die Wellenerregung sei nun derart, daß $(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})$ lediglich eine Funktion der Tiefe z sei, und $\mathfrak{w}_t$ lediglich eine Funktion der Entfernung $x - x_0$ von der Wellenquelle in der Ebene x_0. Bei einer solchen zylindrischen Erregung muß nach (1) gelten

$$\frac{\partial (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})}{\partial z} - i (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})^2 = i\, \alpha^2 ; \quad \frac{\partial \mathfrak{w}_t}{\partial x} - i\, \mathfrak{w}_t^2 = - i\, \alpha^2 \quad \ldots \ldots \quad (1'),$$

worin α eine von x und z unabhängige Größe sein muß. Wenn nach (31) an U_1 $\mathfrak{w}_t$ nicht von x abhängt, so wird das bei unserer Erregung auch im Innern nicht der Fall sein, so daß nach (1') daselbst

$$\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = \alpha \quad \ldots \quad (4); \qquad (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}) = i\, \alpha \cdot \operatorname{tgh} \{ \alpha (z - z_0) \} \quad \ldots \quad (5).$$

Die Bodenbedingung (3) ist mit (5) ebenfalls erfüllt. An der Oberfläche ($z = 0$) wird nach (2), (4) und (5) verlangt

$$(\alpha z_0) \operatorname{tgh} (\alpha z_0) \cdot \left\{ g + \frac{c}{D} \frac{(\alpha z_0)^2}{z_0^2} \right\} = \nu^2 z_0 \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

eine Beziehung zwischen lauter Konstanten, wie es sein muß. Sie dient zur Berechnung von $\alpha = \sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$. Aus (5) ergibt sich noch

$$(\mathfrak{k} \operatorname{grad} (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})) = \frac{\partial (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})}{\partial z} = \frac{i\, \alpha^2}{\cosh^2 \alpha (z - z_0)} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Weil $\operatorname{div} \mathfrak{w}_t = -(\mathfrak{k} \operatorname{rot} [\mathfrak{w}\, \mathfrak{k}])$ verschwindet, ist nach (3) § 1 $\mathfrak{w}^2 = - i [\mathfrak{k} \operatorname{grad} (\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})] \neq 0$, d. h. die Bahnen der Teilchen in der Welle sind infolge der Bodenrückwirkung nicht mehr Kreise, sondern Ellipsen, auch nicht an der Oberfläche.

$\eta = \xi \cdot \operatorname{tgh} \xi$ ist für alle reellen Argumente ξ stets reell und positiv. Wenn somit $c = 0$ und $\nu'' = 0$, ist nach (6) α für alle möglichen Werte der positiven Größe $\nu'^2 z_0 / g$ reell. Bei Abwesenheit von Oberflächenspannungen und bei ungedämpften Sinuswellen existiert also gemäß (4) kein $\mathfrak{w}_t''$, keine Tangentialverlöschung; man beachte, daß zwischen Dämpfung $e^{-\nu'' t}$ der Quelle und Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}'' \mathfrak{r})}$ der Welle unterschieden werden muß. Ferner ist dann nach (5) der Verlauf von $(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})$ mit der

Tiefe unperiodisch, und zwar ist $(\mathfrak{w}' \mathfrak{k}) = 0$; $(\mathfrak{w}'' \mathfrak{k}) \mathfrak{k} = \mathfrak{w}''$ nach oben gerichtet, wobei sein Betrag vom Werte 0 am Boden nach oben hin monoton zunimmt bis zum Werte $\alpha' \cdot \operatorname{tgh} (\alpha' z_0) = \nu'^2/g$. Die Wellenflächen $\Phi'' =$ konst. sind wagerechte Ebenen, die um so dichter beisammen liegen, je mehr man sich von unten her der Oberfläche nähert; die Amplituden nehmen demzufolge von unten nach oben zu. Die Wellenflächen $\Phi' =$ konst. sind, weil $\mathfrak{w}_t' = \mathfrak{w}' =$ konst., gleichabständige, vertikale Ebenen.

Wenn $c \neq 0$, ist (6) eine kubisch-transzendente Gleichung von der Form

$$\xi^3 + p\,\xi + q \cdot \operatorname{cotgh} \xi = 0 \text{ mit } \xi = \alpha z_0,\ p = D\,g\,z_0^{\,2}/c \text{ und } q = -D\,\nu^2 z_0^{\,3}/c \quad (6').$$

Selbst wenn ν' oder ν'' verschwindet und $\operatorname{cotgh}^2 \xi$ reell wäre, hätten wir eine positive Diskriminante, wären also neben einer reellen Wurzel auch zwei konjugiert komplexe Wurzeln von ξ möglich. Und alle Wurzeln, auch wenn sie alle komplex, haben physikalische Gültigkeit. **Wenn also Oberflächenspannungen vorkommen, so treten selbst in ungedämpften Sinuswellen auch komplexe α auf. Anderseits ist in gedämpften Sinuswellen selbst bei Abwesenheit von Oberflächenspannungen stets α komplex.** Wenn aber α komplex, existiert nach (4) ein konstanter und endlicher Wert von $\mathfrak{w}_t''$, mithin Verlöschung auch in der Wagerechten, sowie ein variabler Wert von $(\mathfrak{w}' \mathfrak{k})$, somit Phasenbewegung auch längs der Lotrechten. Da weiter dann die hyperbolischen Funktionen periodische Glieder enthalten, existieren dann auf- und abschwankende Werte von $(\mathfrak{w}' \mathfrak{k})$ und $(\mathfrak{w}'' \mathfrak{k})$ längs der Tiefe, sowie nach (7) und (8) Werte von $(\mathfrak{k} \operatorname{grad} (\mathfrak{w}' \mathfrak{k})) = -2\,(\mathfrak{w}_t' \mathfrak{w}_t'')$. **Die Wellenflächen Φ'; Φ'' sind nun gekrümmt und gewellt — um so mehr, je näher der Oberfläche — und liegen nicht mehr normal zueinander.**

Wenn α reell, läßt sich unsere Welle ausnahmsweis durch Standwechsel von Stationarität aus gewinnen, weil eben nur $\mathfrak{w}_t'$ existiert und $(\mathfrak{w}'' \mathfrak{k})$, somit das fiktiv stationäre Feld längs der U-Ebene ohne Veränderung der Konfiguration sich verschieben läßt. Diese bedingte Zulässigkeit läßt sich aber nur von unserer Theorie aus beurteilen. Denn wann α reell, vermag jenes Verfahren nicht zu bestimmen. Das Ergebnis stimmt mit dem unsrigen in diesem Unterfalle formal überein, wenn wir berücksichtigen, daß mit Hilfe von (5) $e^{\Phi''} = e^{(\mathfrak{w}'' \mathfrak{k})(\mathfrak{k} \mathfrak{r})} = \cosh \alpha (z - z_0)$ wird. Diese Rechenweise und jede andere, die von unserer Theorie verschieden ist, versagt aber, sobald α komplex ausfällt. Und das ist fast immer der Fall. Nicht einmal, wenn ein ruhendes Mittel vorhanden ist, das an den leeren Raum grenzt — ein Fall, wo das Verfahren des Standwechsels an sich als selbstverständlich korrekt erscheint (siehe I § 1) —, liefert es sichere und allgemeine Ergebnisse. Es geht nicht an, daß man in den nach diesem Verfahren erhaltenen Spezialformeln etwa α komplex ansetzt, weil dann ja $\mathfrak{w}_t''$ und $(\mathfrak{w}' \mathfrak{k})$ Werte existieren, die das Verfahren des Standwechsels unbrauchbar machen. Uebrigens weiß das bisherige Verfahren, das obendrein mit zu engen Begriffen arbeitet, mit komplexen Werten begreiflicherweise nichts anzufangen; es hilft sich mit der Deutung, daß sie labile Verhältnisse anzeigten. Darauf wird später noch besonders einzugehen sein. Nur nach unserer Theorie kommt man allemal annahmenfrei zum Ziel, d. h. man ist imstande, die Wellenflächen $\Phi' =$ konst. und $\Phi'' =$ konst. in dieser gebundenen Welle anzugeben, ein Zeichen, daß man es mit einer Theorie zu tun hat und nicht mit einem ad hoc zurechtgelegten Verfahren.

Das Verhältnis der Amplituden an Oberfläche und Boden berechnet sich nach I § 4 unter Berücksichtigung von $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}^*) = (\mathfrak{w}_t\,\mathfrak{w}_t^*) + (\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})(\mathfrak{w}^*\,\mathfrak{k})$ und unter Benutzung von $(\mathfrak{w}_t\,\mathfrak{w}_t^*) = \alpha\,\alpha^*$ nach (4) sowie (5) und (6) zu

$$V_1 : V_2 = \sqrt{1 + \operatorname{tgh} \alpha z_0 \cdot \operatorname{tgh} \alpha^* z_0} = \sqrt{\frac{(\nu\,\nu^*)^2}{\alpha\,\alpha^* \left\{g + \frac{c}{D}\,\alpha^2\right\} \left\{g + \frac{c}{D}\,\alpha^{*2}\right\}}} \quad . \quad . \quad (9),$$

ein Ausdruck, der nur bei reellem α für alle z_0 nicht größer als $\sqrt{2}$ werden kann.

Es sind soviele geführte Wellen möglich, als (6') Wurzeln hat, also ohne Oberflächenspannungen eine, mit dagegen mindestens drei. Die Frage, unter welchen Umständen die eine oder die andere auftritt, stellen wir zurück. Daß Oberflächenspannungen Horizontalverlöschungen in der Welle hervorrufen, ist keineswegs eine nur diesen eigentümliche Wirkung.

b) Zwei Flüssigkeiten — die eine mit freier Oberfläche — ruhen über einem ebenen, festen und wagerechten Boden im Schwerefelde; die von den drei U-Flächen geführte Welle sei darzustellen.

Außer der Wellengleichung (1) in jedem der Mittel muß sein: an der Oberfläche U_1, wo $z = z_1$ (negativ),

$$(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k}) \{g + \frac{c}{D} \mathfrak{w}_{1t}^2\} + i \nu^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

nach Gl. (28') § 1, an der Zwischenfläche U_2, wo $z = 0$, nach § 1 Gl. (4), (14), (16'), (22) und (25)

$$\mathfrak{w}_{1t} = \mathfrak{w}_{2t} \quad (11), \qquad \omega_1 = - \omega_2 \quad (12), \qquad (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k}) = - (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k}) = \text{konst.} \quad (13),$$

$$(\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})) = 0 = (\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})) \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

$$(\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, \mathfrak{w}_{1t}^2) = 0 = (\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, \mathfrak{w}_{2t}^2) \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

ferner die Druckbedingung nach (28) ebenda

$$D_2 \{(\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})\, g + i \nu^2\} + D_1 \{(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})\, g + i \nu^2\} + c_{12} (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})\, \mathfrak{w}_{2t}^2 = 0$$

oder im Hinblick auf (1) und (14), da $\partial \mathfrak{w}_t / \partial x = 0$ sein soll,

$$\eta\, g - \frac{c_{12}}{D_1 + D_2} (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})^2 + \frac{i \nu^2}{(\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})} = 0\,, \qquad \eta = \frac{D_2 - D_1}{D_2 + D_1} \quad \ldots \ldots \quad (16);$$

sowie schließlich am Boden U_3, wo $z = z_0$ (positiv), nach (32) § 1

$$(\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Es sei wieder die Wellenerregung zylindrisch, so daß nur Abhängigkeiten von x und z in Frage kommen können. An U_2 und U_3 hängt $(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})$ nicht von x ab. Wir nehmen deswegen an, daß dies auch an U_1 gelte. Nach (31) § 1 ist denn dort auch $\mathfrak{w}_t^2$ frei von x. Wir dürfen deshalb weiter annehmen, daß $\mathfrak{w}_t^2$ und $(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})$ überhaupt nicht von x abhängen, was natürlich nicht besagt, daß die Wellenberge längs x konstant seien. Jedoch — abweichend von den geführten Wellen ohne Zwischenfläche U_2 — gibt es hier keine Erregungsart, die $\mathfrak{w}_t^2$ auch unabhängig von der Tiefe z zur Folge hat. Die Lösung läßt sich nämlich infolge der zusätzlichen Bedingungen nicht auf (4) aufbauen, auch nicht auf der integrablen Erweiterung $\mathfrak{w}_t^2 = \alpha \{1 + \sigma / \cosh^2 \mu\, (z - z_0)\}$. Unsere dreifach geführte Welle hat durch U_2 eine andere physikalische und deshalb auch analytische Struktur; sie zeigt selbst in horizontaler Richtung keine einheitlich durch die ganze Tiefe gehende Wellenbewegung und Wellenlänge. Sobald also zwei Flüssigkeiten übereinander geschichtet sind, ist es mit einer horizontal gemessenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, unabhängig von der Tiefe, vorbei. Auf der Annahme dieser Unabhängigkeit beruht aber die Möglichkeit der Anwendung des Verfahrens des Standwechsels von Stationarität aus zur Darstellung dieser Welle. Ein äußeres Zeichen dieser Verfehltheit ist, daß das bisherige Verfahren[1]) in diesem Falle Gleitlosigkeit an der Zwischenfläche errechnet, was niemals möglich ist, wie oben auseinandergesetzt wurde.

Wenn wir von der Kapillarität absehen, muß bei positivem η, also bei stabiler Schichtung, $(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})$ zwischen U_1 und U_2 einen Vorzeichenwechsel aufweisen, also durch Null oder Unendlich gehen, wovon letzteres hier ausgeschlossen ist. Denn nach (10) und (16) muß für $c = 0$ sein

$$(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})_{z_1} = \eta\, (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})_0 = - \eta\, (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})_0 \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Bei Außerbetracht der Kapillarität stehen die Vertikalamplituden an U_1 und U_2 im Verhältnis von $(D_2 - D_1) : (D_2 + D_1)$.

Die Integration der Welle läßt sich schon in dieser Aufgabe heute noch nicht meistern. Wir gehen versuchsweise weiter, uns auf den nun ungefähr bekannten Verlauf von $(\mathfrak{w}\, \mathfrak{k})$ mit der Tiefe stützend. Mit Rücksicht auf (18) lassen sich die Bedingungen (10) bis (17) erfüllen, wenn wir setzen

$$(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k}) = - i\, \alpha_1 \frac{(z_0^3 - z^3)^2 - \gamma}{(z_0^3 - z^3)^2} \quad (19); \qquad (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k}) = - i\, \alpha_2 \frac{(z_0^3 - z^3)^2}{(z_0^3 - z^3)^2 + \gamma} \quad (20)$$

mit α_1, α_2 und γ als Konstanten, so daß

$$(\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})) = \frac{\partial (\mathfrak{w}_1 \mathfrak{k})}{\partial z} = i\, \alpha_1\, \gamma \frac{6 z^2}{(z_0^3 - z^3)^3} \quad \ldots \ldots \quad (21),$$

$$(\mathfrak{k}\, \mathbf{grad}\, (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})) = \frac{\partial (\mathfrak{w}_2 \mathfrak{k})}{\partial z} = i\, \alpha_2\, \gamma \frac{6 z^2 (z_0^3 - z^3)}{\{(z_0^3 - z^3)^2 + \gamma\}^2} \quad \ldots \ldots \quad (22),$$

[1]) Love, Lehrbuch der Hydrodynamik. Teubner, Leipzig. 1. Aufl. 1907, S. 438.

und, da nach (1) $\mathfrak{w}_t^2 = -(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f})^2 - i\,\partial(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f})/\partial z$,

$$\mathfrak{w}_{1\,t}^2 = \alpha_1^2 \frac{\{(z_0^3 - z^3)^2 - \gamma\}^2}{(z_0^3 - z^3)^4} + \alpha_1 \gamma \frac{6\,z^2}{(z_0^3 - z^3)^3} \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

$$\mathfrak{w}_{2\,t}^2 = \alpha_2^2 \frac{(z_0^3 - z^3)^4}{\{(z_0^3 - z^3)^2 + \gamma\}^2} + \alpha_2 \gamma \frac{6\,z^2\,(z_0^3 - z^3)}{\{(z_0^3 - z^3)^2 + \gamma\}^2} \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Kleine α machen die Welle klein, große α aber auch, weil sie eine starke Verlöschung bedingen. Wenn $z = \pm\infty$ werden kann, verschwindet daselbst $(\mathfrak{f}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f}))$, während $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f})^2$ und $\mathfrak{w}_t^2$ endlich bleiben, wie wir entsprechend der vorangehenden Aufgabe erwarten müssen. $(\mathfrak{f}\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f}))$ verschwindet aber auch für $z = 0$, ebenso $(\mathfrak{f}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{w}_t^2)$. Bedingung (13) verlangt

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{z_0^6 + \gamma}{z_0^6} \cdot \frac{z_0^6 - \gamma}{z_0^6} = \left(\frac{\gamma}{z_0^6} - 1\right)\left(\frac{\gamma}{z_0^6} + 1\right) \quad \ldots \ldots \quad (25),$$

womit dann auch zugleich die Stetigkeit von $\mathfrak{w}_t^2$ gewährleistet ist.

Bei Außeracht der Kapillarität folgt aus den beiden Druckbedingungen nach (18)

$$\frac{(z_0^3 - z^3)^2 - \gamma}{(z_0^3 - z_1^3)^2} = -\eta \frac{z_0^6 - \gamma}{z_0^6}, \quad \text{also}, \quad \{1 - (z_1/z_0)^3\}^2 = \zeta \quad \text{gesetzt} \quad . \; . \quad (26),$$

$$\gamma = z_0^6 \frac{(1 + \eta)\,\zeta}{1 + \eta\,\zeta} = z_0^6 \{1 - (z'/z_0)^3\}^2 \quad \ldots \ldots \quad (26'),$$

worin z' der Wert von z sei, bei dem (19) zufolge $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{f})$ bei positivem η verschwindet, wenn γ positiv ausfällt. Untersuchen wir γ als Funktion von $\eta = (D_2 - D_1) : (D_2 + D_1)$. Alle möglichen Werte von η liegen zwischen -1 und $+1$. Für $\eta = 0$ ist $\gamma = z_0^6\,\zeta > 0$. Mit wachsendem η nimmt γ monoton ab. Bei negativem η steigt γ von $z_0^6\,\zeta$ an monoton bis $+\infty$, welcher Wert bei $\eta_k = -1/\zeta$ erreicht wird. Hier springt γ nach $-\infty$ und nähert sich dann steigend der Abszissenachse, die bei $\eta = -1$ erreicht wird. Daraus geht hervor, daß nur bei positivem η Werte von $|z'|$ existieren können, die kleiner als $|z_1|$ sind. Bei negativen η findet somit nach (19) im Intervall $(0 < z < z_1)$ kein Zeichenwechsel von $(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{f})$ statt. Das ist, was Bedingung (18) verlangt.

Aus (10) folgt weiter in Verbindung mit (26) und (25)

$$\alpha_1 = \frac{\nu^2}{g}\,\eta\left(\frac{\gamma}{z_0^6} - 1\right) \quad (27); \qquad \alpha_2 = \frac{\nu^2}{g}\,\eta\left(\frac{\gamma}{z_0^6} - 1\right)^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{z_0^6} + 1\right) \quad . \; . \quad (28),$$

womit nun alle drei Konstanten festgelegt sind. Bei Außeracht der Kapillarität und reiner Sinus-Erregung $(\nu'' = 0)$ oder reiner Exponential-Erregung $(\nu' = 0)$ fallen die beiden α reell aus, so daß $\mathfrak{w}_t^2$ reell und $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f})$ imaginär, d. h. es existiert dann nach unseren Formeln nur wagerechte Phasenbewegung und nur lotrechte Verlöschung, aber natürlich wagerechte und lotrechte Amplitudenkomponenten.

Mit (26′) wird

$$\gamma/z_0^6 - 1 = \frac{\zeta - 1}{\eta\,\zeta + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29),$$

welcher Ausdruck für positive η stets positiv ist. Bei positivem η, also bei stabiler Schichtung, sind mithin die beiden α stets positiv, so daß gemäß (23)

$$(\mathfrak{w}_{1\,t})^2_{z_1} > (\mathfrak{w}_{1\,t}^2)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30\,\mathrm{a})$$

ausfällt. An der Oberfläche U_1 ist die große Achse der Bahnellipse wagerecht, die Amplitude größer und die Wellenlänge kleiner als an der Zwischenfläche U_2. Bei der Abszisse z' ist die Verlöschung am geringsten, die Welle dort am ausgeprägtesten. Der Ort ist daran erkenntlich, daß dort Strichpolarisation in der Welle herrscht.

Bei negativem η ist α_1 zunächst negativ. Bei dem kritischen Werte $\eta_k = -1/\zeta$ springt α_1 von $-\infty$ auf $+\infty$ und fällt von dort aus ab bis auf den Wert ν^2/g für $\eta = -1$. Auch α_2 ist für negative η zunächst negativ. Bei η_k springt es ebenfalls von $-\infty$ auf $+\infty$, fällt von dort aus ab, aber durch 0 bei $\eta = -(\zeta + 1)/2\,\zeta$ gehend, auf den Wert $-\nu^2/g$.

In dem instabilen Intervall $(\eta_k < \eta < 0)$ sind somit $\alpha_1\,\gamma$ und $\alpha_2\,\gamma$ beide negativ, mithin

$$(\mathfrak{w}^2_{1\,t})_{z_1} < (\mathfrak{w}_{1\,t}^2)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30\,\mathrm{b}).$$

An der Oberfläche U_1 ist die große Achse der Bahnellipse lotrecht, die Amplitude kleiner und die Wellenlänge größer als an der Zwischenfläche U_2.

In dem anschließenden instabilen Intervall $(-1 < \eta < \eta_k)$, wo γ negativ ist, ist $\alpha_1 \gamma$ ebenfalls negativ, zunächst auch $\alpha_2 \gamma$, so daß das gleiche gilt, wie unter (30b). Jenseits des Wertes $\eta = -(\zeta + 1)/2\zeta$ ist aber $\alpha_2 \gamma$ positiv, so daß dort wieder $(\mathfrak{w}_{1t}^2)_{z_1} > (\mathfrak{w}_{1t}^2)_0$ ist. Obgleich bei η_k die γ, α_1, α_2 einen Vorzeichensprung haben, erleiden $(\mathfrak{w}''\mathfrak{k})$ und $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$ einen solchen nicht. Und obgleich die Amplitudenkomponenten $(\mathfrak{w}''\mathfrak{k})$ und $\sqrt{\mathfrak{w}_t^2}$ dort unendlich groß ausfallen, so ist doch die Welle kaum merklich, weil die Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}''\mathfrak{k})(\mathfrak{k}\mathfrak{r})}$ ungeheuer groß ist.

Wenn $\gamma/z_0^6 = -1$, ist $\alpha_1 = \nu^2/g \cdot (\zeta + 1)/\zeta$; $\alpha_2 = 0$. Dann ist $(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})$ und $\mathfrak{w}_{2t}^2 = 0$ für Werte $z \neq 0$. Die Welle ist auf das obere Mittel beschränkt. Der Fall tritt nur bei der durch $\eta = -(\zeta + 1)/2\zeta$ bestimmten instabilen Schichtung ein. $\gamma/z_0^6 = 1$ ist nur für $z_1/z_0 = 0$ möglich. Dann ist $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. Wenn das obere Mittel sehr dünn ist gegen das untere, gäbe es somit bei keiner Dichteverteilung eine merkliche, dreifach geführte Welle. Wenn auch dieser Grenzfall durchaus nicht einen Uebergang zu der vorangehenden Aufgabe mit nur einem Mittel mit freier Oberfläche bildet, so ist doch diese Folgerung unannehmbar; wir müssen auch dann α_1 und $\alpha_2 \neq 0$ verlangen. Wenn somit z_1/z_0 einen gegen 1 kleinen Betrag hat, sind unsere Formeln unbrauchbar.

Unsere Darstellung liefert zwangläufig $(\mathfrak{k} \operatorname{grad} (\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = 0$ am Boden, somit auch nach (1) und (17) $\mathfrak{w}_{2t}^2 = 0$. Unsere dreifach geführte Welle läßt danach die Flüssigkeit am Boden in Ruhe, wenigstens hinter der Front. Infolgedessen herrschen dort nach unseren Formeln synchrone Druckschwankungen, im Gegensatz zu der Welle ohne Zwischenfläche U_2. Das kann natürlich in Strenge nicht gelten, verrät aber, daß die Welle dort große Geschwindigkeit hat.

Bei Berücksichtigung der Grenzflächenspannungen fließen aus den Bedingungen (19) bis (25) Formeln für α_1 α_2 und γ, die natürlich sehr viel verwickelter sind; insbesondere können die α komplex ausfallen. 833

Gießen, im Juli 1927.

Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen.

Von **H. POLLACZEK-GEIRINGER** in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

Es ist bekannt, welch vielfache Anwendung in verschiedenen Gebieten der Wahrscheinlichkeitsrechnung die sogenannte Poissonsche Formel

$$\mathfrak{w}(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

findet[1]). Sie gibt für große n und kleine q (»seltene Ereignisse«) bei $nq = a$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n-maliger Wiederholung einer Alternative das Ereignis, das die Wahrscheinlichkeit q besitzt, x-mal eintritt[2]). Auch wenn die Wahrscheinlichkeit von Versuch zu Versuch wechselt, aber im Mittel q beträgt, so daß $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = a$, gilt Gl. (a) unverändert als limes-Ausdruck der Wahrscheinlichkeit[3]).

Es liegt die Frage nahe, ob etwa der Poissonsche Ausdruck, analog dem durch einen anderen Grenzübergang gewonnenen Laplaceschen, allgemeiner auch für den Fall gilt, daß es sich nicht nur um einfache Alternativen, sondern um beliebige Verteilungen handelt, also um Aufgaben, in denen der Einzelversuch $(m + 1)$ verschiedene Wertigkeiten ergibt. Durch die folgenden Untersuchungen (Abschn. **1** bis **2**) wird diese Frage verneint und es wird die allgemeine Formel abgeleitet, die an Stelle der Poissonschen als der allgemeinste Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse tritt, wenn bei jedem Einzelversuch unter $(m + 1)$ Ausgangsmöglichkeiten m verschwindend kleine Wahrscheinlichkeiten besitzen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, aus n Urnen, die die

[1]) Vergl. Poisson, »Recherches sur la probabilité des jugements«, 1837.

[2]) Hierzu, namentlich zu den Anwendungen in der allgemeinen Statistik, vergl. L. v. Bortkiewicz, »Das Gesetz der kleinen Zahlen«, Leipzig 1898.

[3]) R. v. Mises, »Ueber die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse«, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 121 bis 124.

Nummern 0 bis m enthalten, die Summe x zu ziehen, ist bei großem n unter den oben angedeuteten Bedingungen:

$$\mathfrak{w}(x) = \Sigma\, \psi(a_1, n_1) \ldots \psi(a_m, n_m) \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

die Summe erstreckt über die Kombinationen der ganzen positiven Zahlen $n_1, \ldots n_m$ für die $\sum_{\mu=1}^{m} \mu\, n_\mu = x$ ist. Das Ergebnis gestattet eine sehr einfache Deutung, die die Plausibilität des Resultats erkennen läßt: Man kann mit den seltenen Ereignissen so rechnen, als ob m unabhängige Alternativen zwischen je einem von ihnen und dem nicht seltenen Ausgang vorlägen. Nimmt man an, daß mehr als einem Ereignis endlich bleibende Wahrscheinlichkeiten zukommen, und den übrigen verschwindend kleine, so liegt für die Wahrscheinlichkeit die Summe x zu ziehen, bereits der Laplacesche Fall vor, das Resultat wird ein Teil des allgemeinen »Fundamentalsatzes« der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es bleibt aber immer noch von Interesse[1]), in diesem »gemischten« Falle für die m-dimensionale Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m)$, die dafür besteht, in n Zügen gerade $n_0, n_1, \ldots n_m$ Lose der $(m+1)$ verschiedenen Arten zu ziehen, den Grenzübergang durchzuführen. Das Resultat ist ein sehr einleuchtendes. Es erscheint nämlich im limes, wenn etwa $(k+1)$ »häufige«, $m-k=j$ »seltene« Losarten vorhanden sind, ein Produkt aus j eindimensionalen Poissonschen Funktionen in eine k-dimensionale Gaußsche Funktion: Die seltenen Ereignisse sind im limes voneinander, wie auch von den nicht seltenen Ereignissen unabhängig, die Ereignisse großer Wahrscheinlichkeit sind untereinander gekoppelt und verhalten sich so, als ob die übrigen kleinen Möglichkeiten gar nicht vorhanden wären. In Abschn. **3** werden verschiedene Anwendungsmöglichkeiten dieser Ergebnisse kurz besprochen.

Noch in einer zweiten Richtung hat man in neuerer Zeit versucht, die Poissonsche Formel in Analogie zur Laplaceschen zu stellen. Bekanntlich werden in der Kollektivmaßlehre willkürliche Verteilungsfunktionen derart mit der Laplace-Gaußschen verglichen, daß man sie in eine Reihe entwickelt, die mit $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ anfängt und nach den sukzessiven Ableitungen von φ fortschreitet (Brunssche oder φ-Reihe). Wendet man dies auf n Funktionen an und führt an deren φ-Reihen die Operation der Faltung oder der Summenbildung aus, so gelangt man zu einer φ-Reihe, die sich im limes auf ihr erstes Glied reduziert. Charlier[2]) hat nun im Rahmen einer etwas allgemeineren Theorie vorgeschlagen, arithmetische Verteilungen in Reihen zu entwickeln, deren erstes Glied die Poissonsche Funktion $\psi(a, x)$ ist, während die weiteren aus sukzessiven Differenzenquotienten von $\psi(a, x)$ nach x bestehen.

In einer kürzlich erschienenen kleinen Arbeit[3]) habe ich unter Benutzung des sogenannten Stetigkeitssatzes des Momentenproblemes einen Entwicklungssatz bewiesen, wonach jede begrenzte arithmetische Verteilung und diejenigen nichtbegrenzten, deren Momente einer gewissen Ungleichheit genügen, in eine ψ-Reihe entwickelbar sind. Die in der genannten Arbeit nur kurz angegebenen Formeln, die man zur Durchführung der Entwicklung benötigt, werden hier — im Anschluß an Ch. Jordan[4]) — ausführlicher zusammengestellt, und auf eine praktisch leicht zu handhabende Form gebracht. Schließlich wird gezeigt, wie sich die Faltung oder Summenbildung aus n Verteilungen in den ψ-Reihen darstellt (Abschn. **6.**) und dabei auf den charakteristischen Unterschied hingewiesen, der gegen den Fall der φ-Reihe besteht und der bewirkt, daß an Stelle der ursprünglichen Poissonschen Formel bei der Faltung beliebiger arithmetischer Verteilungen unsere allgemeinere Formel (b) tritt.

1. Das erweiterte Poissonsche Problem. Auf die Form eines sogenannten Urnenschemas gebracht, lautet unsere Aufgabe wie folgt: In n Urnen mögen schwarze, weiße, rote, ... Kugeln oder mit 0, 1, 2, ... m bezeichnete Kugeln oder Lose in be-

[1]) Das ist eine Fragestellung, auf die mich Herr F. Bernstein, Göttingen, aufmerksam gemacht hat.

[2]) Charlier, Ueber das Fehlergesetz Ark. f. Math. Nr. 8, S. 1 bis 9 und ebenda, Ueber die Darstellung willkürlicher Funktionen Nr. 20, S. 1 bis 35.

[3]) H. Pollaczek-Geiringer, »Die Charliersche Entwicklung willkürlicher Verteilungen«, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1928, S. 98 bis 111.

[4]) Ch. Jordan, »Sur la probabilité des épreuves répétées«, Bull. de la soc. math., t. LIV (1926), S. 1 bis 37; er verfolgt den Charlierschen Gedanken weiter, sieht aber, ebenso wie auch Charlier selbst, von jeder Untersuchung der Konvergenz oder Entwickelbarkeit ab.

liebigen Mischungsverhältnissen vorhanden sein. Man zieht aus jeder Urne einmal und addiert die n gezogenen Zahlen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(x)$ dafür, eine bestimmte Summe x zu erhalten. Dabei soll n sehr groß sein, aber der in Betracht kommende Bereich von x und damit der »Erwartungswert« der Ziehung ein beschränkter. Ist in der ν-ten Urne das Mischungsverhältnis ein solches, daß durch $\mathfrak{v}_\nu(0)$, $\mathfrak{v}_\nu(1)$, .. $\mathfrak{v}_\nu(m)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines 0, 1, 2, ... m-wertigen Loses gegeben wird, so bedeutet, wie bekannt,

$$\mathfrak{b}_\nu = \sum_{\mu=0}^{m} \mu\, \mathfrak{v}_\nu(\mu)$$

den Erwartungswert des Zuges aus der ν-ten Urne. Für die Summe der aus den n Urnen gezogenen Zahlen stellt

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{b}_\nu$$

den Erwartungswert dar. Zunächst sieht man: Wenn dieser beschränkt bleiben soll, so müssen, mindestens von einem bestimmten $n = n_0$ an, alle $\mathfrak{b}_\nu$ beliebig klein werden und somit erst recht die Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}_\nu(\mu)$ $(\nu > n_0;\ \mu = 1, .. m)$, eine von 0 verschiedene Zahl zu ziehen, so daß also der Fall »seltener Ereignisse« vorliegt. Dieser ordnet sich nicht dem Gedankengang des Laplaceschen Grenzüberganges unter, für den wesentlich ist, daß die zu erwartenden Summenwerte mit n ins Unendliche wachsen.

Es bezeichne nun

$$q_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{v}_\nu(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Wahrscheinlichkeit, aus der ν-ten Urne eine positive Zahl zu ziehen, ferner

$$a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{v}_\nu(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die erwartungsmäßige Anzahl des Auftretens des mit μ bezeichneten Loses und

$$A = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Summe aller $n \cdot m$ Wahrscheinlichkeiten für positive Zahlen. Ist Q_n eine Zahl, die von keinem der $q_1, q_2, \ldots q_n$ erreicht wird,

$$Q_n > q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, .. n),$$

so setzen wir voraus, daß:

$$Q_n < \frac{C}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo C eine positive Konstante bedeutet. Der von Poisson behandelte Fall geht aus unserm hervor, wenn für alle ν, $\mathfrak{v}_\nu(2) = \mathfrak{v}_\nu(3) = .. = 0$ gesetzt wird und $\mathfrak{v}_1(1) = \mathfrak{v}_2(1) = .. = \mathfrak{v}_n(1) = q$. Läßt man die zweite dieser Einschränkungen fort, so hat man den oben erwähnten von v. Mises behandelten Fall.

Für $\mathfrak{w}_n(x)$ gilt definitionsgemäß:

$$\sum_{x=0}^{n \cdot m} \mathfrak{w}_n(x)\, t^x = \left[\sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{v}_1(\mu)\, t^\mu\right] \cdot \left[\sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{v}_2(\mu)\, t^\mu\right] \cdots \cdots \left[\sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{v}_n(\mu)\, t^\mu\right] \quad . \quad . \quad (5).$$

Denn der Koeffizient von t^x in der Entwicklung der rechten Seite ist die Summe aller möglichen Produkte aus n Faktoren, in denen n_0 Faktoren die Gestalt $\mathfrak{v}_\nu(0)$, n_1 die Gestalt $\mathfrak{v}_\nu(1)$, .. n_m die Gestalt $\mathfrak{v}_\nu(m)$ haben $(\nu = 1, 2, .. n)$, derart, daß $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \mu\, n_\mu = x$ ist.

Wir geben zunächst den leicht abzuleitenden Wert von $\mathfrak{w}_n(0)$ an, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in n Zügen nur Nullen auftreten; sie ist gleich dem Produkt aller $\mathfrak{v}_\nu(0)$. Wegen $\sum\limits_{\mu=0}^{m} \mathfrak{v}_\nu(\mu) = 1$ können wir dafür schreiben:

$$\mathfrak{w}_n(0) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{v}_\nu(\mu)\right] = \prod_{\nu=1}^{n} (1 - q_\nu)$$

und bei Uebergang zum Logarithmus:

$$-\ln \mathfrak{w}_n(0) = -\sum_{\nu=1}^{n} \ln(1 - q_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu + {}^1/_2 \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu^2 + \ldots \ldots \quad . \quad . \quad (6).$$

Die erste der Summen rechts in (6) ist zufolge (3) gleich A; da ferner nach (4) alle q_ν kleiner als $Q_n < \frac{C}{n}$, also von einem gewissen n an kleiner als ein echter Bruch sein müssen, so fällt die Reihe rechts stärker ab als die geometrische mit den Quotienten Q_n. Da alle Glieder positiv sind, liegt daher die rechte Seite von (6) zwischen A und $\frac{A}{1-Q_n}$. Es gilt also:

$$e^{-A} \geqq \mathfrak{w}_n(0) \geqq e^{-\frac{A}{1-Q_n}} \geqq e^{-A}\left(1 - \frac{A\,Q_n}{1-Q_n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Wenn beim Grenzübergang $Q_n \to 0$ geht, nähert sich die obere Grenze in (7) der untern und beide werden gleich e^{-A}.

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{w}_n(0) = e^{-A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

2. Die allgemeine Poissonsche Formel. Um $\mathfrak{w}_n(x)$ für beliebige x-Werte zu finden, setzen wir zunächst auf der rechten Seite von (5) $t^\mu = t_\mu$ $(\mu = 1, \ldots m;\ t^0 = t_0 = 1)$ und suchen den Koeffizienten $\mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m)$ von $t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}$ in der Entwicklung der rechten Seite von (5). Dabei ist immer, weil die Summe x aus i-wertigen Losen $(i = 1, 2, \ldots m)$ zusammengesetzt werden soll,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n - n_0 \leqq x\,,$$

also beschränkt. Der gesuchte Koeffizient stellt die m-dimensionale Wahrscheinlichkeit dafür dar, beim einmaligen Ziehen aus jeder Urne gerade n_1 Einsen, n_2 Zweier, ... n_m m-wertige Lose zu erhalten. Der Uebergang von $\mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m)$ zu $\mathfrak{w}_n(x)$ wird dann durch die »Mischung«

$$\mathfrak{w}_n(x) = \Sigma\, \mathfrak{w}_n(n_1, n_2, \ldots n_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gegeben, die Summe erstreckt über diejenigen Kombinationen der natürlichen Zahlen $n_1, \ldots n_m$, für die $\sum_{\mu=1}^{m} \mu\, n_\mu = x$ ist.

An Stelle von (5) tritt als Definitionsgleichung der $\mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m)$ die Identität:

$$\sum_{n_1=0}^{n} \ldots \sum_{n_m=0}^{n} \mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m)\, t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m} = \prod_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{v}_\nu(\mu)\, t_\mu\right] \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Auf der rechten Seite heben wir den Faktor $\mathfrak{w}_n(0) = \mathfrak{w}_n(0, \ldots 0) = \mathfrak{v}_1(0) \ldots \mathfrak{v}_n(0)$ heraus:

$$\sum_{n_1=0}^{n} \ldots \sum_{n_m=0}^{n} \frac{\mathfrak{w}_n(n_1 \ldots n_m)}{\mathfrak{w}_n(0)}\, t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m} = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\mathfrak{v}_\nu(\mu)}{\mathfrak{v}_\nu(0)}\, t_\mu\right] \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Schreibt man kürzer:

$$\frac{\mathfrak{v}_\nu(\mu)}{\mathfrak{v}_\nu(0)} = \frac{\mathfrak{v}_\nu(\mu)}{1-q_\nu} = \varepsilon_\nu(\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots m;\ \nu = 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

so sieht man, daß der Koeffizient von $t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}$ eine Summe von Produkten aus je $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ Faktoren:

$$\Sigma\, \varepsilon_{\alpha_1}(1)\, \varepsilon_{\alpha_2}(1) \ldots \varepsilon_{\alpha_{n_1}}(1)\, \varepsilon_{\beta_1}(2)\, \varepsilon_{\beta_2}(2) \ldots \varepsilon_{\beta_{n_2}}(2) \ldots \varepsilon_{\gamma_1}(m)\, \varepsilon_{\gamma_2}(m) \ldots \varepsilon_{\gamma_{n_m}}(m) \quad (13)$$

ist, wobei die $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ irgend eine Anordnung von $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ der Zahlen $1, 2, \ldots n$ darstellen, also das Argument der ε n_1-mal den Wert 1, n_2-mal den Wert 2, ... annimmt. Die Zahl der Summanden ist:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!\, n_0!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$\left(\text{mit } \sum_{\mu=0}^{m} n_\mu = n\right)$, nämlich gleich der Anzahl individuell verschiedener Anordnungen von n Figuren auf $m+1$ Plätzen, wobei auf den μ-ten Platz $(\mu = 0, \ldots m)$ n_μ entfallen.

Wir vergleichen zum Zwecke der Abschätzung die Summe (13) mit dem Produkt:

$$\prod_{\mu=1}^{m} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu(\mu)\right]^{n_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Dieser Ausdruck, der sich aus n^{n-n_0} Gliedern susammensetzt, enthält gewiß jeden der $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!\,n_0!}$ Summanden von (13), und zwar nicht nur einmal, sondern $n_1!\,n_2!\ldots n_m!$-mal. Denn in der k-ten Potenz einer Summe ist $k!$ der Koeffizient jedes Gliedes, das aus lauter Faktoren verschiedener Indizes zusammengesetzt ist. Da die Zahl aller Summanden in (15) gleich der $(n_1+n_2+\ldots+n_m)$-ten Potenz von n ist, so umfaßt die Entwicklung von (15) außerdem noch:

$$z = n^{n-n_0} - n_1!\ldots n_m!\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!\,n_0!} = n^{n-n_0} - n(n-1)\ldots(n_0+1)$$

$$= n^{n-n_0}\left[1 - 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-n_0-1}{n}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Glieder, nämlich die Produkte von Gliedern, die nicht aus lauter verschiedenen Faktoren bestehen.

Die Werte von $\varepsilon_\nu(\mu)$ liegen jedenfalls zwischen Null und einer oberen Schranke, für die, zufolge (1), wenn man vorübergehend das größte aller $\mathfrak{v}_\nu(\mu)$ mit v_n bezeichnet, $\frac{v_n}{1-Q_n}$ gesetzt werden kann Da aber alle $\mathfrak{v}$ positive Zahlen sind, so ist sicher nach (1) dieses v_n kleiner als Q_n, so daß wir für die obere Schranke der ε auch $\frac{Q_n}{1-Q_n}$ schreiben können. Es gilt jedenfalls:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(\mu) \leqq \frac{1}{1-Q_n}\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{v}_\nu(\mu) = \frac{a_\mu}{1-Q_n} \quad (\mu=1,\ldots m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

da hier die Nenner gegenüber den richtigen Nennern $1-Q_\nu$ der $\varepsilon_\nu(\mu)$ nur verkleinert sind. Anderseits ist aber:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(\mu) > \sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{v}_\nu(\mu) = a_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

da unmöglich alle q_ν gleich Null, alle $\mathfrak{v}_\nu(0)$ gleich 1 sein können.

Mit Rücksicht auf (16) liegt nun das $n_1!\ldots n_m!$-fache von $\frac{\mathfrak{w}_n(n_1\ldots n_m)}{\mathfrak{w}_n(0)}$ zwischen dem Größtwert von (15) und dem um $z\cdot\left(\frac{Q_n}{1-Q_n}\right)^{n-n_0}$ verminderten kleinst-möglichen Wert von (15):

$$\frac{a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}}{(1-Q_n)^{n-n_0}} \geqq \frac{n_1!\ldots n_m!\,\mathfrak{w}_n(n_1\ldots n_m)}{\mathfrak{w}_n(0)} \geqq \frac{a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}}{1} - z\cdot\left(\frac{Q_n}{1-Q_n}\right)^{n-n_0} \quad . \quad (19).$$

Dividieren wir (19) noch durch $a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{(1-Q_n)^{n-n_0}} \geqq \frac{n_1!\ldots n_m!\,\mathfrak{w}_n(n_1\ldots n_m)}{a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}\,\mathfrak{w}_n(0)} \geqq 1 - \frac{z\,Q_n^{n-n_0}}{(1-Q_n)^{n-n_0}\,a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}}$$

$$= 1 - \prod_{\mu=1}^{m}\left(\frac{n\,Q_n}{(1-Q_n)\,a_\mu}\right)^{n_\mu}\left[1 - \prod_{\nu=1}^{n-n_0-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Multipliziert man (20), um $\mathfrak{w}_n(0)$ zu eliminieren, mit (7) und kürzt durch e^{-A}, so erhält man schließlich:

$$\frac{1}{(1-Q_n)^{n-n_0}} \geqq \mathfrak{w}_n(n_1,\ldots n_m)\frac{n_1!\ldots n_m!}{a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}\cdot e^{-A}}$$

$$\geqq \left(1-\frac{A\,Q_n}{1-Q_n}\right)\left\{1 - \prod_{\mu=1}^{m}\left(\frac{n\,Q_n}{(1-Q_n)\,a_\mu}\right)^{n_\mu}\left[1 - \prod_{\nu=1}^{n-n_0-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Mit wachsendem n geht nach unserer Voraussetzung (4) Q_n gegen Null; alle n_μ, $(\mu=1,\ldots m)$, $\left(\sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n - n_0\right)$, alle a_μ und auch $n\,Q_n$ bleiben endlich. Demnach gehen beide Außenglieder von (21) gegen 1, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{w}_n(n_1,\ldots n_m) = \frac{a_1^{n_1}\ldots a_m^{n_m}}{n_1!\ldots n_m!}\cdot e^{-A} = \frac{a_1^{n_1}\,e^{-a_1}}{n_1!}\ldots\frac{a_m^{n_m}\cdot e^{-a_m}}{n_m!}$$

$$= \psi(a_1,n_1)\ldots\psi(a_m,n_m) \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Daraus folgt, wenn wir uns an (9) erinnern, das Resultat:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Ziehung aus n Urnen mit je $(m+1)$ verschiedenen $0, 1, \ldots\, m$-wertigen Losen die Summe x zu

ziehen, ist, wenn n unbegrenzt wächst, und gleichzeitig die obere Schranke Q_n aller $q_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{w}_\nu(\mu)$ wie $1/n$ abnimmt, durch die Formel:

$$\mathfrak{w}(x) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{w}_n(x) = \sum \psi(a_1, n_1) \ldots \psi(a_m, n_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

gegeben, wobei die Summe über alle die Kombinationen der $n_1, \ldots n_m$ zu erstrecken ist, für welche $\sum_{\mu=1}^{m} \mu\, n_\mu = x$, wenn die $a_1, \ldots a_m$ durch (2) definiert sind.

Unsere Ergebnisse (22) und (23) drücken aus, daß seltene Ergebnisse so zu behandeln sind, als ob m unabhängige Alternativen vorlägen, d. h. als ob n Urnen nur mit Nullen und Einsen, n Urnen nur mit Nullen und Zweien, ... vorhanden wären, und aus diesen Urnen je einmal gezogen und die Summe gebildet würde. Den Ausdruck (22) kann man dann als den limes der Wahrscheinlichkeit dafür deuten, in $n \cdot m$ Zügen aus diesen sämtlichen Urnen im ganzen n_1 Einsen, ... n_m m-wertige Kugeln zu erhalten, und Gl. (23) als die Wahrscheinlichkeit dafür, die Summe x zu ziehen; das sind Resultate, denen keineswegs analoge im Gaußschen Falle entsprechen, die aber gewiß nicht unplausibel sind. Denn es ist durchaus anschaulich, daß Ereignisse, die sehr selten sind, einander nicht beeinflussen. Wenn in einer Urne (unseres ursprünglichen, aus n Urnen bestehenden Urnenschemas) fast lauter Nullen und nur ganz vereinzelt Einsen, Zweien, ... liegen, so erscheint es verständlich, daß das Auftreten der letzteren jedesmal wie ein »unabhängiges Ereignis« wirkt.

Die Berechnung von $\mathfrak{w}(x)$ ist hier also auf die Berechnung von $\mathfrak{w}(n_1, \ldots n_m)$ zurückgeführt. Diese letztere ist aber eine sehr spezielle m-dimensionale Verteilung, da das m-dimensionale Merkmal jeden Zuges hier nur aus m Alternativen besteht (ob eine 1-, eine 2-, eine m-wertige Kugel gezogen wurde oder nicht). Mit der Berechnung von $\mathfrak{w}(n_1, \ldots n_m)$ ist dann in unserem Falle kleiner Erwartungszahl x die Aufgabe gelöst, im Gegensatz zum Gaußschen Falle, in welchem, da beliebig große x betrachtet werden, das keine Lösung wäre.

Erwähnt sei noch, daß in dem Spezialfall $(m+1)$-wertiger, aber untereinander gleicher Verteilungen

$$\mathfrak{v}_1(\mu) = \mathfrak{v}_2(\mu) = \ldots = \mathfrak{v}_n(\mu) = q_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$
$$\mathfrak{v}_1(0) = \mathfrak{v}_2(0) = \ldots = \mathfrak{v}_n(0) = p\,,$$

der eine besonders einfache Verallgemeinerung des ursprünglichen Poissonschen Problems darstellt, die Lösung ebenso unmittelbar wie bei Poisson gefunden werden kann. Denn die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n$ $(n_1 \ldots n_m)$ in n Zügen n_μ μ-wertige Lose $(\mu = 0, \ldots m)$, $(\sum_{\mu=0}^{m} n_\mu = n)$ zu ziehen, ist analog der Newtonschen Formel durch die Polynomialformel gegeben:

$$\mathfrak{w}_n(n_1, \ldots n_m) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!\, n_0!}\, q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_m^{n_m} \cdot p^{n_0}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n_0+1)}{[n(1-A/n)]^{n_1} \ldots [n(1-A/n)]^{n_m}} \cdot \frac{a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m}}{n_1! \ldots n_m!} \left(1 - \frac{A}{n}\right)^n$$
$$= \frac{1}{(1-A/n)^{n_1}} \cdot \frac{1 - 1/n}{(1-A/n)^{n_2}} \ldots \frac{1 - \frac{n-n_0-1}{n}}{(1-A/n)^{n_m}} \cdot \frac{a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m}}{n_1! \ldots n_m!} \left(1 - \frac{A}{n}\right)^n \qquad (24),$$

wobei die a_μ und A die durch (2) gegebene Bedeutung haben; mit wachsendem n geht jeder der $(n - n_0)$ Brüche einzeln gegen 1 und der Ausdruck $(1 - A/n)^n$ geht gegen e^{-A}, woraus (22) folgt.

Man wird auch schließlich nach dem limes von $\mathfrak{w}_n$ $(n_1, \ldots n_m)$ fragen, falls beim Grenzübergang der eingangs erwähnte »gemischte« Fall angenommen wird, d. h. falls mehr als eine Wahrscheinlichkeit von der Größenordnung Eins bleibt. Erinnern wir uns zunächst, um den Zusammenhang zu verstehen, daß im »reinen« Gaußschen Falle, d. h. falls alle vorhandenen Wahrscheinlichkeiten von gleicher Größenordnung sind, die Wahrscheinlichkeit in n Zügen je $z_0, z_1, \ldots z_k$ mit $0, 1, \ldots k$ bezeichnete Lose zu ziehen, durch eine k-dimensionale Gaußsche Funktion

$$\varphi(z_1, \ldots z_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k D}} \cdot e^{-\frac{\sum^{1..k} A_{ij}(z_i - b_i)(z_j - b_j)}{2D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

gegeben ist, wobei $b_1 \ldots b_k$ die Mittelwerte, D die Determinante aus der k-reihigen Streuungsmatrix der $\{a_{ij}\}$, A_{ij} das algebraische Komplement zu a_{ij} darstellt. Als Näherungsformel für große n gilt also im »reinen Gaußschen Fall«:

$$\mathfrak{w}_n(z_1, \ldots z_k) \sim \varphi(z_1, \ldots z_k).$$

Der gemischte Fall besteht nun darin, daß von den $(m+1)$ Losarten $(k+1)$ »häufige«, j »seltene« sind; $k+j=m$, und daß nach dem limes der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(x_1, \ldots x_j, z_1, \ldots z_k)$ dafür gefragt wird je $x_1, \ldots x_j, z_1, \ldots z_k$ Lose der verschiedenen Sorten in n Zügen zu erhalten, falls die Erwartungswerte der häufigen Lose mit n unbegrenzt wachsen, die der seltenen festbleiben. Genau gesagt, wird der Grenzübergang so vorgenommen, daß bei obiger Bedeutung von $\mathfrak{v}_\nu(\mu)$ die obere Schranke aller $q = \sum_{\mu=k+1}^{m} \mathfrak{v}_\nu(\mu)$ wie $1/n$ abnimmt, während die $\mathfrak{v}_\nu(\mu)$ $(\mu = 0, 1, \ldots k)$ nicht abnehmen. Bei Durchführung des Grenzüberganges werden wie üblich neue $u_i = \frac{z_i - b_i}{\sqrt{n}}$ $(i = 1, \ldots k)$ eingeführt, um in diesen neuen Variablen endlichen Mittelwert und endliche Streuung zu erzielen. Als Näherungsformel für große n gilt dann:

$$\mathfrak{w}_n(x_1, \ldots x_j, z_1, \ldots z_k) \sim \psi(a_1, x_1) \ldots \psi(a_j, x_j)\, \varphi(z_1, \ldots z_k) \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

wobei $\varphi(z_1, \ldots z_k)$ durch (25) bestimmt ist. Oder etwas umständlicher als exakte Limes-Formel:

$$\lim_{n \to \infty} n^{k/2}\, \mathfrak{w}_n(x_1, \ldots x_j, u_1\sqrt{n} + b_1, \ldots u_k\sqrt{n} + b_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k H}} \cdot e^{-\frac{\sum_1^k H_{ij} u_i u_j}{2H}} \cdot \prod_{i=1}^{j} \psi(a_i; x_i) \quad (27),$$

dabei sind durch $h_{ij} = \frac{a_{ij}}{n}$ die »reduzierten Streuungen« eingeführt, sowie ihre Determinante H und die adjungierten Unterdeterminanten H_{ij}; die $b_1, \ldots b_k$; $a_1, \ldots a_j$ sind die Erwartungswerte.

In dem erwähnten Spezialfall $(m+1)$-wertiger, aber untereinander gleicher Verteilungen, dem ja praktisch besondere Bedeutung zukommt, der bei endlichem n durch den Polymonial-Ansatz gedeckt war, lassen sich alle hier auftretenden Erwartungswerte und Streuungen leicht explizit ausrechnen. Sind z. B. im ganzen fünf verschiedene Losarten vorhanden, denen die »kleinen« Wahrscheinlichkeiten s_1, s_2, die »großen« Wahrscheinlichkeiten p, q, $r' = 1 - s_1 - s_2 - p - q$ entsprechen, und setzt man noch $r = 1 - p - q$ und im Einklang mit den bisherigen Festsetzungen $n s_1 = a_1$; $n s_2 = a_2$, so gilt die gebrauchsfertige Näherungsformel

$$\mathfrak{w}_n(x_1, x_2, x, y) \sim \frac{a_1^{x_1}}{x_1!} e^{-a_1} \cdot \frac{a_2^{x_2}}{x_2!} e^{-a_2}$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi n \sqrt{pqr}} \cdot e^{-\frac{q(r+p)(x-np)^2 + 2pq(x-np)(y-nq) + p(r+q)(y-nq)^2}{2npqr}} \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Man sieht hier besonders deutlich, daß zwischen dem Ausdruck der großen Wahrscheinlichkeiten und dem der kleinen keine Koppelung vorhanden ist, und natürlich auch nicht zwischen den kleinen untereinander, sondern daß der φ-Ausdruck derselbe ist, der auch aufträte, wenn die sämtlichen Losarten kleiner Wahrscheinlichkeit gar nicht vorhanden wären. ($r = 1 - p - q$, nicht etwa $r' = 1 - p - q - s_1 - s_2$ geht in $\varphi(xy)$ ein!)

Das hier behandelte gemischte Problem mit $(k+1)$ großen, λ kleinen Wahrscheinlichkeiten ist das allgemeine Problem dieser Art; es geht für $k = 0$ in den »reinen Poissonschen«, für $j = 0$ in den »reinen Gaußschen« Fall über. Man sieht, daß zur numerischen Auswertung keine neue Tafeln erforderlich sind, sondern nur Produkte aus bekannten Tafelwerten gebildet werden müssen.

3. Anwendungsbeispiele. Das, was in der Praxis angewendet wird, ist natürlich nicht unmittelbar die limes-Formel (23), wie ja überhaupt der Grenzübergang, bei dem jedesmal, wenn man zu einem größern n übergeht, die Verteilungen aller Urnen sich ändern, nur eine mathematische Hilfsvorstellung ist. Was gesucht wird, ist ein Näherungswert für $\mathfrak{w}_n(x)$ bei großem n. Jedenfalls zeigten die Ungleichungen (21), daß man mit Recht als Näherungsformel den Ausdruck

$$\mathfrak{w}_n(x) \sim \sum \psi(a_1, n_1) \ldots \psi(a_m, n_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

benutzen kann, wenn man bei größerem n verhältnismäßig kleine Erwartungszahlen a_μ hat.

Eine unmittelbare Illustrationsmöglichkeit zu unserer Formel bietet im Bereich der Bevölkerungslehre die Statistik der Mehrlingsgeburten. Nach dem »Statistischen Jahrbuch für das Deutsche Reich 1927« ist für einen Bevölkerungskreis von 120000 Seelen die monatliche Erwartungszahl einer Zwillingsgeburt $a_1 \sim 2{,}64$, die einer Drillingsgeburt $a_2 \sim 0{,}027$, die einer Vierlings- und sonstigen Mehrlingsgeburt $a_3 \sim 0{,}00038$.

Um klar zu sehen, wie eine derartige Angabe zu verstehen ist, bzw. wie an einem statistischen Material unsere Formel zu prüfen wäre, betrachten wir für einen Augenblick nur die Statistik der Zwillingsgeburten allein. Dieser entspricht die einfache Poissonsche Formel, die in folgender Weise angewendet wird: Die statistische Beobachtung gibt für den betrachteten Bevölkerungskreis für eine große Zahl N von Monaten eine Reihe kleiner Zahlen x (von der Größenordnung 1), oder die monatliche Anzahl von tatsächlich eingetretenen Zwillingsgeburten im 1., 2., 3., ... N-ten Monat der Beobachtung. Unter diesen sei etwa $x = 1$, α_1-mal, $x = 2$, α_2-mal, $x = k$, α_k-mal vorgekommen mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = N$. Die Frage ist, ob die relativen Häufigkeiten der verschiedenen x, d. h. die Zahlen $\frac{\alpha_1}{N}, \frac{\alpha_2}{N}, \ldots \frac{\alpha_k}{N}$ derartige sind, wie sie gemäß der einfachen Poissonschen Formel zu erwarten wären. Dabei steht es zunächst noch dahin, welcher Parameterwert a für die Poissonsche Funktion $\psi(a, x)$, mit der wir unser Material vergleichen, zu wählen ist. Man pflegt für dieses a das arithmetische Mittel der sämtlichen N beobachteten x-Werte zu nehmen; das hat einen guten Sinn, denn wenn unser Beobachtungsmaterial genau einer Poissonschen Verteilung entspräche, d. h. wenn die relative Häufigkeit $\frac{\alpha_1}{N}, \frac{\alpha_2}{N} \ldots$ der Eins, der Zwei ... genau eine solche wäre, wie die Poissonsche Formel sie liefert, also:

$$\frac{\alpha_1}{N} \sim \psi(a, 1), \qquad \frac{\alpha_2}{N} \sim \psi(a, 2), \ldots$$

dann wäre dieses a genau gleich dem arithmetischen Mittel der beobachteten x-Werte. Denn für dieses arithmetische Mittel kann man auch schreiben:

$$\frac{\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \ldots}{N} = 1 \cdot \frac{\alpha_1}{N} + 2\,\frac{\alpha_2}{N} + \ldots$$

und anderseits gilt:

$$\psi(a, 1) \cdot 1 + \psi(a, 2) \cdot 2 + \ldots = a.$$

Man bestimmt also praktisch ein a als arithmisches Mittel der N x-Werte und vergleicht die mit diesem a gerechneten $\psi(a, 1)$, $\psi(a, 2)$ ... mit den beobachteten relativen Häufigkeiten α_1/N, α_2/N, ...

Es ist von Interesse, sich klar zu machen, daß das n, die Anzahl der in jedem Monat beobachteten Einzelfälle, in dem oben geschilderten Vorgang überhaupt keine Rolle spielt, da es für die Poissonsche Formel charakteristisch ist, daß in ihr das n nicht explicite auftritt. Man könnte unter n die Anzahl der in dem betrachteten Bevölkerungskreis vorhandenen Geburtsvorgänge verstehen, aber auch die Anzahl der erwachsenen Frauen, oder auch die gesamte Bevölkerungszahl (also hier 120000); beobachtet wird, wie oft bei einer solchen innerhalb eines Monats vorgenommene »Versuchsserie« von n Einzelversuchen, das »Ereignis«, die Geburt eines Zwillings, eintritt.

In gleicher Weise kann man eine Statistik der Drillingsgeburten durch N Monate verfolgen, das arithmetische Mittel a_2 der beobachteten monatlichen Anzahlen der Drillingsgeburten rechnen und nachsehen, ob die relativen Häufigkeiten dieser Zahl der Poissonschen Formel mit dem Parameter a_2 entsprechen. Weiter kann man ein a_3 für Vierlingsgeburten bestimmen usf. Die Prüfung unserer Formel (23) wird nun darin bestehen, einerseits aus den $\psi(a_1, x)$, $\psi(a_2, x)$, ... deren Parameter die Einzelstatistiken geliefert haben, theoretisch nach (23) die Wahrscheinlichkeit dafür zu rechnen, daß (in dem oben betrachteten Zeit- und Bevölkerungskreis) eine bestimmte Gesamtzahl x von Kindern geboren werden, die irgendwelchen Mehrlingsgeburten entstammen. Anderseits liefert die Statistik aller Mehrlingsgeburten die relativen Häufigkeiten für das Entstehen von 1, 2, 3 ... Kindern aus Mehrlingsgeburten. Diese Zahlen sind mit den rechnerisch gefundenen zu vergleichen.

Man sieht, daß diese Ueberlegung, wenn man die Anwendbarkeit der einfachen Poissonschen Formel für einen gegebenen Fall als gesichert ansieht, darauf hinauskommt, die statistische Unabhängigkeit der Mehrlingsgeburten zu prüfen, die ja von vornherein plausibel erscheint. Man erwartet nicht, daß die Wahrscheinlichkeit der Geburt von a Zwillingen und b Drillingen in einem Monat etwas anderes sei, als das Produkt der

betreffenden beiden Einzelwahrscheinlichkeiten. Das gleiche gilt für andere seltene Ereignisse. Z. B. scheint es selbstverständlich, daß zwischen einer Statistik der durch Hufschlag Getöteten und einer der durch Absturz vom Flugzeug Getöteten keinerlei Abhängigkeiten bestehen. Anderseits wird man gewiß annehmen, daß die Statistiken der durch Tuberkulose und etwa der am Herzschlag Gestorbenen solche Abhängigkeiten aufweisen. Der mathematische Grund für diesen Unterschied liegt darin, daß dort, wo es sich um sehr seltene Todesarten handelt, für den Einzelnen nur eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit besteht, beiden Risiken ausgesetzt zu sein. Diese Wahrscheinlichkeit ist eben von der Größenordnung des Produktes zweier kleinen Größen. Sind aber die Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse mit 1 vergleichbar, so verschwindet die scheinbare Unabhängigkeit. Diese Verhältnisse werden auch durch das mehrdimensionale Gaußsche Gesetz wiedergegeben, in das tatsächlich ein »Koppelungsglied« eingeht.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten unserer Formel (23) kann man an folgende Bemerkung anschließen: Die einfache Poissonsche Verteilung $\psi(a, x) = \frac{a^x e^{-a}}{x!}$ hat die charakteristische Eigenschaft, daß für sie Mittelwert und Streuung einander gleich sind, nämlich beide gleich a. Für das durch (23) gegebene $\mathfrak{w}(x)$ besteht diese Eigenschaft nicht mehr. Denn der Mittelwert des ν-ten Einzelversuches ist durch $b_\nu = 1 \cdot \mathfrak{v}_\nu(1) + \ldots + m \cdot \mathfrak{v}_\nu(m)$ gegeben, seine Streuung durch

$$s_\nu^2 = 1 \cdot \mathfrak{v}_\nu(1) + 4 \cdot \mathfrak{v}_\nu(2) + \ldots + m^2 \cdot \mathfrak{v}_\nu(m) - b_\nu^2,$$

da nun bei unseren Annahmen die einzelnen b_ν^2 wie $1/n^2$ abnehmen und ihre Summe (über $\nu = 1 \ldots n$) wie $1/n$, so gilt im Limes für Mittelwert und Streuung von $\mathfrak{w}(x)$

$$a = a_1 + 2\,a_2 + \ldots + m\,a_m = \sum_{\mu=1}^{m} \mu\, a_\mu$$

$$s^2 = a_1 + 4\,a_2 + \ldots + m^2\,a_m = \sum_{\mu=1}^{m} \mu^2\, a_\mu\,,$$

wobei die a_μ durch (2) gegeben sind. Es ist also hier, sobald $m > 1$, die Streuung immer größer als der Mittelwert und es liegt darum nahe, wenn sich in einer als Statistik seltener Ereignisse deutbaren Beobachtungsreihe die beobachtete Streuung größer ergibt als der Mittelwert, statt einer einfachen Alternative eine entsprechende $(m+1)$-wertige Verteilung als Ansatz zugrunde zu legen.

Die Statistik der Zeitabstände zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Scintillationen einer radioaktiven Strahlung [1]) bildet ein bekanntes Beispiel für die Anwendung der Poissonschen Formel. Dabei liegt die Vorstellung zugrunde, daß sich diese Zeitabstände so verhalten, wie die Zeitabstände zwischen je zwei gleichen Ergebnissen einer in gewissen konstanten Zeitintervallen wiederholten einfachen Alternative; der Eintritt einer Scintillation wird hierbei als seltenes Ereignis aufgefaßt. Es wurden vielfach Unstimmigkeiten zwischen beobachtetem Erwartungswert und beobachteter Streuung bemerkt; doch liegen diese für fast alle Versuchsserien in entgegengesetztem Sinne, d. h. die Streuung ergab sich als kleiner als der Erwartungswert, so daß es keinen Sinn hätte, in diesem Falle den Ansatz einer einfachen Alternative durch den einer mehrwertigen Verteilung zu ersetzen.

Hingegen kennt man in der Bevölkerungsstatistik zahlreiche Fälle, in denen stark übernormale Dispersion auftritt. Ein interessantes Beispiel dieser Art, das jedenfalls von dem Gesichtspunkt der seltenen Ereignisse aus zu betrachten ist, bildet den Gegenstand einer neueren Arbeit von Polya und Eggenberger [2]) über die Statistik verketteter Vorgänge. Die Verfasser stellen, um die statistische Struktur der Sterblichkeit an Blattern in der Schweiz wiederzugeben, eine Annahme auf, die sie treffend als »Chancenvermehrung durch Erfolg« bezeichnen. Im Urnenschema gestaltet sich ihr Ansatz wie folgt: Eine Urne enthält zu Beginn eines Spieles S schwarze und W weiße, zusammen $S+W=N$ Kugeln. War nun bei einem Zug die gezogene Kugel eine weiße, bzw. eine schwarze, so legt man vor dem nächstem Zug in die Urne d Kugeln der betreffenden Farbe, so daß das Mischungsverhältnis zugunsten der zuletzt gezogenen Kugel verändert wird. Gefragt wird nach

[1]) Vergl. v. Bortkiewicz, Radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin 1913.

[2]) »Ueber die Statistik verketteter Vorgänge«, diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 279 bis 289.

der Wahrscheinlichkeit dafür, unter den angegebenen Bedingungen in n Zügen s schwarze und $w = n - s$ weiße Kugeln zu ziehen. Es ergibt sich zunächst bei endlichem n eine kombinatorische Formel für diese Wahrscheinlichkeit. In dieser wird zur Grenze für $n \to \infty$ übergegangen unter der »Poissonschen« Annahme, daß die Einzelwahrscheinlichkeit σ des einen Ereignisses so klein ist, daß ihre Erwartungszahl $\sigma \cdot n$ noch von der Größenordnung 1 ist. Man erhält eine Formel, die für $d \to 0$ in die einfache Poissonsche Formel übergeht. Mit Hilfe dieser Theorie läßt sich unter anderm die Tatsache erklären, daß bei einem beobachteten Mittelwert monatlicher Sterbefälle von 5,5 die beobachtete Streuung 83,56 beträgt, (während nach der einfachen Poissonschen Formel beide Zahlen gleich sein müßten). Die Pólya-Eggenbergersche Theorie gestattet, wenn man die verfügbare Konstante d geeignet wählt, nicht nur die stark übernormale Dispersion zu verstehen, sondern auch sonst die Beobachtungsreihe befriedigend wiederzugeben. Daß dies mit nur einer verfügbaren Konstante gelingt, ist ein großer Erfolg der Theorie.

Zweifellos aber ist die ganze Konstruktion der Chancenvermehrung durch Einlegen immer neuer Kugeln eine recht gekünstelte und ihr Zusammenhang mit dem wirklichen Vorgang schwer erkennbar. Eine weit natürlichere Vorstellung, die an Stelle des Pólya-Eggenbergerschen Schemas treten kann, ergibt sich aus dem allgemeinen Ansatz unserer Problemstellung. Der Grund dafür, daß die Statistik der Blattern-Todesfälle nicht dem einfachen Poissonschen Schema entspricht, ist offenbar der, daß es sich hier gar nicht um einzelne gleichförmige Ereignisse handelt. Es liegen vielmehr Blatternfälle verschiedener Typen vor, solche, die eine alleinstehende Person betreffen, solche, die ein Ehepaar, eine größere Familie, alle Bewohner eines Hauses oder dergl. umfassen. Jeder dieser Typen stellt für sich ein »seltenes Ereignis« vor, das im Sinne der Zählung der Todesfälle als ein ein-, zwei- oder mehrwertiges zu zählen ist. Wir haben also eine Reihe von Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}(1)$, $\mathfrak{v}(2)$, ... die alle klein sind, und die in eine Schlußformel so eingehen, wie dies oben in Abschnitt **1** und **2** ausgeführt wurde; [$\mathfrak{v}(0)$ bedeutet dabei natürlich die »große« Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des Ereignisses]. Daß es gewiß leicht möglich ist, auf diese Art mit Hilfe von vielen verfügbaren Konstanten eine Anpassung an ein gegebenes Beobachtungsmaterial zu erzielen, braucht nicht erst gezeigt zu werden. Von Interesse wäre die Durchführung der Theorie erst dann, wenn durch eine entsprechend ausgebaute Statistik Anhaltspunkte für die Annahmen der $\mathfrak{v}(\mu)$ geboten würden und dann auf Grund solcher Annahmen Mittelwert und Streuung in Theorie und Beobachtung verglichen werden können.

Eine unmittelbare Anwendung der gemischten Formel (26) bietet z. B. die Statistik der Selbstmorde, wenn Erwachsene, (Männer und Frauen), und Kinder, (Knaben und Mädchen), gesondert betrachtet, und dabei Selbstmorde der beiden ersten Gruppen als innerhalb des betrachteten Kollektivs häufige, der beiden letzten Gruppen als seltene Ereignisse gezählt werden. Auch in der Vererbungsstatistik, worauf Hr. F. Bernstein, der die Anregung zur Untersuchung des gemischten Falles gegeben hat, hinwies, ist diese gemischte Formel heranzuziehen.

4. Einführung der ψ-Reihe. Die weitgehende Analogie, die zwischen der Poissonschen ψ-Funktion und der Gaußschen Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}$ hinsichtlich ihrer Bedeutung als Grenzfälle der allgemeinen Wiederholungswahrscheinlichkeit besteht, legt es nahe, den Grundgedanken der Kollektivmaßlehre, der in der Verwendung von $\varphi(x)$ als »Vergleichsfunktion« für beliebige Verteilungen besteht, hierher zu übertragen. Bekanntlich wird durch Bruns eine willkürliche Verteilung durch eine Reihenentwicklung dargestellt, an deren Spitze die Funktion $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ steht, während die übrigen Glieder durch die sukzessiven Ableitungen von $\varphi(x)$ nach x gebildet werden. Charlier[1]) hat in Analogie hierzu — ohne Beweis — die Behauptung aufgestellt, daß eine willkürliche arithmetische Verteilung $\mathfrak{v}(x)$, deren Definitionsbereich die Zahlen $x = 0, 1, 2, \ldots$ bilden, deren Werte $\mathfrak{v}(0)$, $\mathfrak{v}(1)$, $\mathfrak{v}(2)$, ... größer oder gleich Null sind und die Summe Eins haben, nach den sukzessiven Differenzen der Poissonschen Funktion

$$\psi(a, x) = \psi_0(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \qquad (x = 0, 1\ 2 \ldots)$$

entwickelt werden kann; a ist dabei stets ein positiver Parameter. Er setzt:

[1]) l. c. S.

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x) = -\psi_0(x) + \psi_0(x-1) \\ \psi_2(x) = -\psi_1(x) + \psi_1(x-1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(x) = -\psi_{n-1}(x) + \psi_{n-1}(x-1) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots (29).$$

Die rekursive Ausrechnung zeigt, daß $\psi_n(x)$ das Produkt von $\psi_0(x)$ in ein Polynom $p_n(x)$ n-ten Grades in x ist $\quad \psi_n(x) = \psi_0(x) \cdot p_n(x) \quad \dots\dots (30).$

Für die $p_n(x)$, die hier eine ähnliche Rolle spielen, wie die Hermiteschen Polynome für die sukzessiven Ableitungen der Gaußschen φ-Funktion gilt gemäß (29) die folgende Rekursion:

$$p_n(x) = -p_{n-1}(x) + p_{n-1}(x-1) \cdot \frac{x}{a}; \qquad p_0(x) = 1 \quad \dots\dots (31),$$

mit deren Hilfe man die $p_n(x)$ und somit die $\psi_n(x)$ finden kann:

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = \frac{x}{a} - 1 \\ p_2(x) = \frac{x(x-1)}{a^2} - 2\frac{x}{a} + 1 \\ \text{— — — — — — — —} \\ p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \binom{x}{\nu} \nu!\, a^{-\nu} \end{array}\right\} \quad \dots\dots (32).$$

Von einer anderen Definition, deren Uebereinstimmung mit der von Charlier leicht nachzuweisen ist, geht Ch. Jordan[1]) aus:

$$\psi_n(x) \equiv p_n(x)\, \psi_0(x) = \frac{d^n}{d a^n} \psi_0(x).$$

Es wird hier also $\psi_0(x) = \psi(a, x)$ nach dem Parameter a differenziert. Wegen:

$$\frac{d\psi_0(x)}{da} = -\psi_0(x) + \psi_0(x-1) = \psi_1(x)$$

gilt:

$$\frac{d^n \psi_0(x)}{d a^n} = \psi_n(x),$$

woraus die Uebereinstimmung der beiden Definitionen hervorgeht. Wir werden hier von dieser Definition keinen weiteren Gebrauch machen.

Die ψ_n bezw. die p_n genügen der folgenden Orthogonalitätsbedingung:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_n(x)\psi_m(x) = \sum_{x=0}^{\infty} p_n(x) p_m(x) \psi_0(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x) \frac{1}{\psi_0(x)} = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$= \frac{n!}{a^n} \qquad (m = n) \quad \dots\dots (33),$$

denn durch partielle Summation folgt:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_m(x)\psi_n(x) = \left[-\psi_{n-1}(x-1)\, p_m(x)\right]_0^{\infty} + \sum_{x=0}^{\infty} \psi_{n-1}(x)\, \Delta p_m(x),$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer an den Grenzen verschwindet.

Ist dann $m < n$, so folgt durch $(m+1)$-malige Anwendung dieses Prozesses:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_m(x)\psi_n(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_{n-m-1}(x)\, \Delta^{m+1} p_m(x) = 0,$$

denn die $(m+1)$-te Differenz von $p_m(x)$ (eines Polynoms m-ten Grades) verschwindet. Dasselbe gilt für $m > n$ da

$$\psi_n(x)\, p_m(x) = \psi_0\, p_n(x)\, p_m(x) = \psi_m(x)\, p_n(x).$$

Ferner gilt für $m = n$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi_n(x)\, p_n(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_0(x)\, \Delta^n p_n(x) = \Delta^n p_n(x) \sum_{x=0}^{\infty} \psi_0(x) = \frac{n!}{a^n},$$

da zufolge (32) $\Delta^n p_n(x) = \frac{n!}{a^n}$.

---

[1]) Ch. Jordan, l. c.

Ist nun

$$\mathfrak{v}(x) \sim a_0\,\psi_0(x) + a_1\,\psi_1(x) + \dots \qquad (34),$$

so bedeute das Zeichen $\sim$, wie üblich, daß — ohne jede Annahme über Konvergenz und Gültigkeit der Entwicklung — die Reihe rechts die Charliersche Reihe von $\mathfrak{v}(x)$ ist, d. h. daß die a_n aus $\mathfrak{v}(x)$ nach Formeln gerechnet werden, die den Eulerschen Formeln für die Fourierkoeffizienten entsprechen. Diese aus der Orthogonalitätsgleichung (33) folgenden Formeln lauten hier:

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} p_n(x)\,\mathfrak{v}(x) \qquad (35).$$

Da nun, wie man aus (32) sieht, die $p_n(x)$ vom n-ten Grade in x sind, so sieht man, daß a_n linear von den ersten $(m+1)$ Momenten $m_0, m_1, \dots m_n$ von $\mathfrak{v}(x)$

$$m_i = \sum_{x=0}^{\infty} x^i\,\mathfrak{v}(x) \qquad (i = 0, 1, \dots) \qquad (36)$$

abhängt. Die ersten $(n+1)$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots a_n$ sind also als lineare Kombinationen der ersten $(n+1)$ Momente $m_0, m_1, \dots m_n$ durch diese bestimmt, und zwar sind das linear unabhängige Kombinationen, da in dem Ausdruck für a_ν jeweils der Summand $\frac{1}{\nu!}\,m$ neu hinzutritt. Daher gilt auch das Umgekehrte. Die $a_0, a_1, \dots a_n$ und $m_0, m_1, \dots m_n$ bestimmen einander also gegenseitig. Darauf beruht der a. a. O. gegebene Beweis des Entwicklungssatzes einer arithmetischen Verteilung in eine ψ-Reihe.

Für die ersten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots$ liefert die Ausrechnung nach (35)

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = m_0; \quad a_1 = m_1 - m_0 a; \quad a_2 = {}^1/_2\, m_2 - {}^1/_2\,(1 + 2a)\, m_1 + {}^1/_2\, a^2 m_0 \\ &a_3 = {}^1/_6\, m_3 - {}^1/_2\,(1 + a)\, m_2 + {}^1/_6\,(2 + 3a + 3a^2)\, m_1 - {}^1/_6\, m_0\, a^3 \\ &\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — — —}\end{aligned}\right\} \qquad (37).$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt es sich stets um solche $\mathfrak{v}(x)$, für die $\sum_{x=0}^{\infty} \mathfrak{v}(x) = 1$ ist. Man hat dann $m_0 = 1$, also den ersten Koeffizienten $a_0 = 1$. Das Anfangsglied der Entwicklung ist somit $\psi_0(x)$, so daß die übrige Reihe die Abweichung der gegebenen Verteilung von der Poissonschen darstellt. Wählt man überdies den Parameter a, den die Entwicklungskoeffizienten noch enthalten, gleich dem Mittelwert $m_1 = \sum_{x=0}^{\infty} x\,\mathfrak{v}(x)$, so verschwindet der zweite Koeffizient: $a_1 = m_1 - a m_0 = m_1 - a = 0$. Der dritte Koeffizient wird dann: $a_2 = \frac{m_2 - a^2}{2} - \frac{a}{2} = {}^1/_2\,(s^2 - a)$, wobei s^2 die »Streuung« der Verteilung, bezogen auf den Schwerpunkt, bezeichnet. Das dritte Glied der Entwicklung, das erste, das auf ψ_0 selbst folgt, rührt demnach her von der Abweichung der tatsächlichen Streuung von dem Wert a, welcher der Streuung einer Poissonschen Verteilung entsprechen würde. Durch a_2 wird also nach einer ganz bestimmten Richtung die Abweichnng der gegebenen Verteilung von einer Poissonschen charakterisiert. Bei den in **2.** und **3.** gegebenen Verallgemeinerungen des reinen Poissonschen Falles war die Streuung stets größer als der Mittelwert, so daß dort a_2 positiv ausfallen würde. Für die Anwendungen kommt in erster Linie diese Entwicklung nach der »ausgezeichneten Reihe« in Betracht, für die also

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{s^2 - a}{2}, \dots$$

Der Quadratsumme der Koeffizienten bei der gewöhnlichen Fourierreihe entspricht hier der Ausdruck:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_0(x)}\,[\mathfrak{v}(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\,\frac{n!}{a^n} \qquad (38).$$

Man erhält (38) aus den Orthogonalitätsbeziehungen (33) unter der Annahme, daß die Reihe rechts in (34) absolut konvergiert und die linke Seite darstellt. Im Anschluß an (38) kann man als allgemeines Maß der Gesamtabweichung der Verteilung $\mathfrak{v}(x)$ von der Poissonschen Funktion $\psi_0(x)$ (analog dem Gebrauch in der Kollektivmaßlehre) den Ausdruck

$$F = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_0(x)}\,[\mathfrak{v}(x) - \psi_0(x)]^2 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{2}{a^2}\,a_2^2 + \frac{6}{a^3}\,a_3^2 + \dots \qquad (39)$$

wählen. Das erscheint plausibel, da $\psi_0(x)$ im Unendlichen wie $\frac{a^x}{x!}$ gegen Null geht und in (39) Fehler von gleichem absolutem Betrag bei wachsendem x in einem mit $\frac{x!}{a^x}$ steigendem Maße zur Geltung kommen.

In bekannter Weise läßt sich die hier betrachtete Entwicklung auch als die »beste Approximation« von $\mathfrak{v}(x)$ durch eine abgebrochene ψ-Reihe deuten. Man kann analog zu (39) für den Fehler der Approximation von $\mathfrak{v}(x)$ durch $\sum_{n=0}^{n} a_\nu \psi_\nu(x)$ die Größe

$$\sum_{x=0}^{\infty}\left[\mathfrak{v}(x)-\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \psi_\nu(x)\right]^2 \cdot \frac{1}{\psi_0(x)} = F_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

als maßgebend betrachten. Sucht man hier die $(n+1)$ Werte der Koeffizienten so zu bestimmen, daß F_n ein Minimum wird, so erhält man:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\left(\mathfrak{v}(x)-\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \psi_\nu(x)\right)\psi_\nu(x)\,\frac{1}{\psi_0(x)} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n).$$

Hier kann man wegen (33) in der inneren Summe alle Glieder bis auf das ν-te streichen und man erhält dann gerade die Formel (35) für a_ν. Die mit diesen nach (35) berechneten Koeffizienten a_ν gebildete ψ-Reihe gibt also die beste Approximation im Sinne des Minimums von F_n.

Für die praktische Berechnung der Koeffizienten verwendet man für $p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}\binom{x}{\nu} \nu!\, a^{-\nu}$ nicht diese — durch die fast vollständige Symmetrie in n und x ausgezeichnete — Form, sondern die gleichwertige:

$$p_n(x) = \frac{n!}{a^n}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \binom{x}{n-\nu}\frac{a^\nu}{\nu!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32').$$

Dann erhält man für den n-ten Koeffizienten der Reihe

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x}{n-\nu}\mathfrak{v}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!\,(n-\nu)!}\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\ldots(x-n+\nu+1)\,\mathfrak{v}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\,\frac{\mu_{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Mit μ_k ist dabei das k-te »faktorielle Moment«[1]) von $\mathfrak{v}(x)$

$$\mu_k = \sum_{x=0}^{\infty}\mathfrak{v}(x)\,x(x-1)\ldots(x-k+1) = \sum_{x=0}^{\infty}\mathfrak{v}(x)\,x^{(k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

bezeichnet. In der rechten Seite von (41) verschwindet der Koeffizient von $\mathfrak{v}(x)$, sofern $x < k$, während er für $x = k$ den Wert $k!$ erhält und für $x > k$ eben durch $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ gegeben ist. Um die Koeffizienten einer, sagen wir m-wertigen (also begrenzten) Verteilung $\mathfrak{v}(x)$ $(x = 0, 1, \ldots m)$ zu finden, muß man sonach nur $(m+1)$ Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_m$ rechnen, wobei in μ_k nur die $\mathfrak{v}(x)$ von $x \geqq k$ an vorkommen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \mathfrak{v}(0)+\mathfrak{v}(1)+\mathfrak{v}(2)+\mathfrak{v}(3)+\ldots+\mathfrak{v}(m-1)+\mathfrak{v}(m)\\
\mu_1 &= 1\,\mathfrak{v}(1)+2\,\mathfrak{v}(2)+3\,\mathfrak{v}(3)+\ldots+(m-1)\,\mathfrak{v}(m-1)+m\,\mathfrak{v}(m)\\
\mu_2 &= 2\,\mathfrak{v}(2)+6\,\mathfrak{v}(3)+\ldots+(m-1)(m-2)\,\mathfrak{v}(m-1)+m(m-1)\,\mathfrak{v}(m)\\
\mu_3 &= 6\,\mathfrak{v}(3)+\ldots+(m-1)(m-2)(m-3)\,\mathfrak{v}(m-1)+m(m-1)(m-2)\,\mathfrak{v}(m)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu_{m-1} &= (m-1)!\,\mathfrak{v}(m-1)+m^{(m-1)}\,\mathfrak{v}(m)\\
\mu_m &= m!\,\mathfrak{v}(m)\\
\mu_{m+1} &= \mu_{m+2} = \mu_{m+3} = \ldots = 0
\end{aligned} \qquad (42).$$

[1]) Die faktoriellen Momente $\mu_k = \sum_{x=0}^{\infty}\mathfrak{v}(x)\,x^{(k)}$ spielen eine ähnliche Rolle wie die Momente $m_k = \sum_{x=0}^{\infty}\mathfrak{v}(x)\,x^k$; die ersten n Momente $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ der beiden Arten bestimmen einander gegenseitig.

Die Formeln (35') lauten dann ausführlich geschrieben:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_1 &= 0\\
a_2 &= \frac{\mu_2}{2!} - a\mu_1 + \frac{a^2}{2}\\
a_3 &= \frac{\mu_3}{3!} - a\frac{\mu_2}{2!} + \frac{a^2}{2!}\mu_1 - \frac{a^3}{3!}\\
a_4 &= \frac{\mu_4}{4!} - a\frac{\mu_3}{3!} + \frac{a^2}{2!}\frac{\mu_2}{2!} - \frac{a^3}{3!}\frac{\mu_1}{1!} + \frac{a^4}{4!} \qquad \ldots \ (35')\\
&- - - - - - - - - - -\\
a_m &= \frac{\mu_m}{m!} - a\frac{\mu_{m-1}}{(m-1)!} + \frac{a^2}{2!}\frac{\mu_{m-2}}{(m-2)!} + \ldots \pm \frac{a^m}{m!}\\
a_{m+1} &= \quad - a\frac{\mu_m}{m!} + \frac{a^2}{2!}\frac{\mu_{m-1}}{(m-1)!} + \ldots\ldots\ldots \pm \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\\
&- - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Koeffizienten verhältnismäßig rasch berechnen. Als Beispiel rechnen wir die Koeffizienten für die dreiwertige Verteilung, die durch $\mathfrak{v}(0)$, $\mathfrak{v}(1)$, $\mathfrak{v}(2)$ gegeben ist. Es ist

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_1 = a, \qquad \mu_2 = 2\,\mathfrak{v}(2)$$

und daher:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\mu_2 - a^2}{2}, \quad a_3 = -a\left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{a^2}{3}\right),$$

$$a_4 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{a^2}{4}\right), \quad \ldots a_n = (-1)^n \frac{a^{n-2}}{(n-2)!}\left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{a^2}{n}\right), \quad \ldots$$

5. Entwicklungssatz. Wir haben in der vorigen Nummer formal die Koeffizienten der ψ-Reihe unter Voraussetzung der Gültigkeit der Entwicklung gefunden und sind auf die praktische Durchführung dieser Rechnung näher eingegangen. Es fehlt noch der Nachweis der Entwickelbarkeit, d. h. es wäre jetzt zu zeigen, daß die Reihe, die auf der rechten Seite von (34) steht, konvergiert und zwar gegen die zu entwickelnde Funktion $\mathfrak{v}(x)$, deren Werte bei Berechnung der Koeffizienten benutzt werden; es ist, wie man auch sagt, zu zeigen, »daß die ψ-Reihe von $\mathfrak{v}(x)$ diese Verteilung auch wirklich darstellt«. Diesen Nachweis führen wir hier nicht. Jch habe aber an anderer Stelle für die Entwickelbarkeit einer arithmetischen Verteilung in eine ψ-Reihe den folgenden Satz gezeigt[1]):

Entwicklungssatz. Die Charliersche Reihe $a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \ldots$ einer arithmetischen Verteilung $\mathfrak{v}(x)$, deren Momente $\mathfrak{m}_\nu = \sum\limits_{x=0}^{\infty}(x+a)^\nu\,\mathfrak{v}(x)$ der Bedingung genügen

$$\sqrt[\nu]{\mathfrak{m}_\nu} < \frac{a}{e}\ln\nu' \quad \text{mit} \quad \nu'\ln\nu' = \nu \qquad \ldots\ldots\ldots \ (44)$$

konvergiert gleichmäßig gegen $\mathfrak{v}(x)$.

Man sieht, daß die Bedingung (44) nur für das Verhalten von $\mathfrak{v}(x)$ im Unendlichen eine Beschränkung darstellt, d. h. für die Schnelligkeit, mit der $\mathfrak{v}(x)$ bei wachsendem x gegen Null geht. Ist $\mathfrak{v}(x)$ eine beliebige begrenzte arithmetische Verteilung, d. h. eine, deren Definitionsgebiet ganz innerhalb eines begrenzten, aber beliebig großen Teiles der positiven Abszissenachse liegt, die also nur für $x = 0, 1, 2, \ldots m$ von Null verschiedene Werte annimmt, so wächst wegen $\sum\limits_{x=0}^{\infty} x^\nu\,\mathfrak{v}(x) < m^\nu \cdot \sum\limits_{x=0}^{\infty}\mathfrak{v}(x) = m^\nu$ das ν^{te} Moment nicht stärker als die ν^{te} Potenz einer natürlichen Zahl, und (44) ist daher jedenfalls erfüllt. Für die begrenzten Verteilungen, die ja praktisch in den Anwendungen die vorherrschenden

---

[1]) H. Pollaczek-Geiringer, »Die Charliersche Entwicklung willkürlicher Verteilungen«, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1928, S. 93 bis 111.

sind, reicht der Satz also jedenfalls aus, um die Berechtigung der Entwicklung darzutun [1]).

Man wird diese Entwicklung anwenden, um für solche empirisch gegebene Verteilungen $\mathfrak{v}(x)$, für die eine Erklärung durch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Formel — wie solche z. B. in Nummer **2** entwickelt worden sind — vorläufig fehlt, d. h. wenn kein theoretischer Anhaltspunkt für das Zutreffen irgendeiner exakten Formel existiert, wenigstens eine Charakterisierung durch Zahlen zu gewinnen. Neben die allgemein üblichen Charakteristiken einer Verteilung, den Mittelwert, die Streuung, treten dann gewisse Kombinationen der höheren Momente, nämlich eben die Koeffizienten der φ- bzw. ψ-Reihe. (Eigentlich hat man es praktisch stets mit unstetigen arithmetischen Verteilungen zu tun, da empirische Beobachtungen stets nur mit beschränkter Genauigkeit durchführbar sind, aber manchmal wird es angepaßt erscheinen, die empirische diskontinuierliche Verteilung durch eine entsprechende stetige Kurve zu ersetzen und diese in die Brunssche φ-Reihe zu entwickeln.)

Als praktische Jnterpolationsformeln kommen natürlich nur die entsprechend abgebrochenen Reihen in Betracht. Man kann — analog zur »harmonischen Analyse« einer willkürlichen Funktion — hier von einer statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe sprechen, da man hier wie dort aus den ersten $(n+1)$ »Fourierkoeffizienten« eine Vergleichskurve $a_0\,\psi_0(x) + a_1\,\psi_1(x) + \ldots + a_n\,\psi_n(x)$ zusammensetzt. Inhalt des Entwicklungssatzes ist von diesem Standpunkt, daß man sich auf diese Weise je nach Wahl von n, jeder beliebigen (gewissen Bedingungen im Unendlichen genügenden) empirischen Beobachtung beliebig gut anpassen kann. — Auf diese Weise gewinnt man auf jeden Fall, wenn auch nicht eine Theorie, so doch eine rationelle Charakterisierung und Interpolation eines vorgelegten Materials.

6. Anwendung der ψ-Reihe auf die Summenbildung. Sind zwei Verteilungen $\mathfrak{v}_1(x)$ und $\mathfrak{v}_2(x)$ gegeben, so berechnet sich, wie bekannt, die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_2(x)$ der Summe x nach der Formel:

$$\mathfrak{v}_2(x) = \sum_{z=0}^{x} \mathfrak{v}_1(z)\,\mathfrak{v}_2(x-z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46).$$

Wir wollen $\mathfrak{v}_1(x)$ und $\mathfrak{v}_2(x)$ durch ihre ψ Reihen gegeben voraussetzen und sehen, wie die Koeffizienten der ψ-Reihen von $\mathfrak{w}_2(x)$ sich aus denen der ψ-Reihen von $\mathfrak{v}_1(x)$ und $\mathfrak{v}_2(x)$ ableiten. Alle ψ-Reihen sollen dabei »ausgezeichnete« sein, deren erster Koeffizient Eins, deren zweiter Null ist. Die Mittelwerte von $\mathfrak{v}_1$ bzw. $\mathfrak{v}_2$ seien a_1 bzw. a_2, der Mittelwert von $\mathfrak{w}_2$ ist dann, da sich bei dem Prozeß der Summenbildung die Mittelwerte bekanntlich addieren, gleich $a_1 + a_2$. Wir haben also den Ansatz, wenn man der Deutlichkeit halber statt $\psi_i(x)$ jetzt $\psi_i(a;x)$ schreibt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1(x) &= \psi_0(a_1;x) + \alpha_2\,\psi_2(a_1;x) + \ldots \\
\mathfrak{v}_2(x) &= \psi_0(a_2;x) + \beta_2\,\psi_2(a_2;x) + \ldots \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46'), \\
\mathfrak{w}_2(x) &= \psi_0(a_1+a_2;x) + \gamma_2\,\psi_2(a_1+a_2;x) + \ldots
\end{aligned}$$

wobei nach (35)

$$\gamma_\nu = \sum_{x=0}^{\infty} p_\nu(a_1+a_2;x) \sum_{z=0}^{x} \mathfrak{v}_1(z)\,\mathfrak{v}_2(x-z) \,.$$

Denkt man sich hier die Summationsreihenfolge umgekehrt, so daß:

$$\sum_{z=0}^{x} \mathfrak{v}_1(z) \sum_{x=0}^{\infty} \mathfrak{v}_2(x-z)\,p_\nu(a_1+a_2;x)$$

---

[1]) Eine weit minder einschränkende Bedingung für das Verhalten von $\mathfrak{v}(x)$ im Unendlichen stellt eine von Herrn G. Szegö, Königsberg, gegebene Bedingung der Entwickelbarkeit dar. Er zeigt die Entwickelbarkeit und die Konvergenz der Reihe unter der Bedingung, daß die Quadratsumme (38) $\sum_{x=0}^{\infty} \mathfrak{v}^2(x) \cdot \frac{1}{\psi_0(x)}$ konvergiert. Der Beweis beruht auf der Hilbertschen Theorie der unendlich vielen Variablen, angewendet auf die Auflösung des »Gleichungssystems mit unendlich vielen Unbekannten« a_k

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}(0) &= a_0\,\psi_0(0) + a_1\,\psi_1(0) + \ldots \\
\mathfrak{v}(1) &= a_0\,\psi_0(1) + a_1\,\psi_1(1) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Schließlich hat Herr E. Schmidt, Berlin, auf sehr einfachem Wege die notwendige und hinreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit einer arithmetischen Verteilung angegeben. (Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1928.)

betrachtet wird, sodann für $\mathfrak{v}_2(x)$ seine ψ-Reihe eingesetzt, so fällt bei der Summation nach x alles heraus, was von den Gliedern über ψ_ν hinaus herrührt. Denn für alle $\mu > \nu$ gilt zufolge der Orthogonalität, wenn P_ν ein ganz beliebiges Polynom ν-ten Grades in x bezeichnet $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \psi_\mu(a;x)\, P_\nu(x) = 0$, weil es bei Ableitung der Orthogonalitätsrelation gar nicht darauf ankam, daß für $P_\nu(x)$ gerade das *Charliersche* Polynom $p_\nu(a;x)$ gesetzt wird, sondern nur die Eigenschaft des Verschwindens der $(\nu+1)$-ten Differenz eines Polynoms ν-ten Grades benutzt wurde. Da $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bei der Summenbildung die gleiche Rolle spielen, so erkennt man, daß *γ_ν nur von den ersten $\nu+1$ Koeffizienten der Entwicklungen für $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ abhängt.* Ersetzen wir also $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ durch die ersten $\nu+1$ Glieder ihrer Entwicklungen und bilden daraus $\mathfrak{w}_2$, so erhalten wir:

$$\sum_{\iota=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \alpha_\iota \beta_\lambda \sum_{z=0}^{x} \psi_\iota(a_1;z)\, \psi_\lambda(a_2;x-z) \quad \ldots\ldots \quad (48).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Summen

$$\Psi_{\iota,\lambda}(x) = \sum_{z=0}^{x} \psi_\iota(a_1;z)\, \psi_\lambda(a_2;x-z)$$

nur von der *Summe* der Indizes $(\iota+\lambda)$ abhängen und ferner, daß diese $\Psi_{\iota+\lambda}(x)$, wie wir sie sodann bezeichnen dürfen, nichts anderes sind als unsere $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots$ Wir zeigen beide Behauptungen gleichzeitig, indem wir sie zunächst für $\iota=\lambda=0$ direkt ausrechnen und sodann die Gültigkeit der für die ψ_ν definierenden Rekursion (29) für unsere Ψ_ν $(\nu = 1, 2 \ldots)$ nachweisen, wobei wir voraussetzen, daß die zu beweisende Abhängigkeit von der bloßen Indizes*summe* bis zu einem bestimmten $\nu = \iota + \lambda$ bereits feststeht, was man gewiß voraussetzen darf, da das für Ψ_0 zutrifft. Es ist zunächst:

$$\Psi_0(x) = \sum_{z=0}^{x} \psi_0(a_1;z)\, \psi_0(a_2;x-z) = e^{-(a_1+a_2)} \cdot \left(\frac{a_2^{\,x}}{x!} + \frac{a_2^{\,x-1}}{(x-1)!}\cdot\frac{a_1}{1} + \ldots\right)$$

$$= \frac{e^{-(a_1+a_2)}}{x!}(a_1+a_2)^x = \psi_0(a_1+a_2;x) \quad \ldots \quad (49).$$

Ferner bilden wir, wie es die Rekursion (29) vorschreibt:

$$-\Delta\Psi_{\iota+\lambda}(x-1) = -\sum_z \psi_\iota(a_1;z)\, \psi_\lambda(a_2;x-z) + \sum_z \psi_\iota(a_1;z)\, \psi_\lambda(a_2;x-z-1)$$

$$= \sum_z \psi_\iota(a_1;z) \cdot [-\Delta\psi_\lambda(a_2;x-z-1)] = \sum_z \psi_\iota(a_1;z)\, \psi_{\lambda+1}(a_2;x-z)$$

$$= \Psi_{\iota,\lambda+1}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50),$$

anderseits aber gilt auch, da die Abhängigkeit von der Indizes*summe allein* bis zu $\nu = \iota + \lambda$ bereits als erwiesen gelten soll:

$$-\Delta\Psi_{\iota+\lambda}(x-1) = -\sum_z \psi_{\iota-k}(a_1;z)\, \Delta\psi_{\lambda+k}(a_2;x-z-1)$$
$$= \Psi_{\iota-k,\,\lambda+k+1} \qquad (k = 1, \ldots \iota) \quad \ldots \quad (51)$$

und

$$-\Delta\Psi_{\iota+\lambda}(x-1) = -\sum_z \psi_{\iota-\rho}(a_2;z)\, \Delta\psi_{\lambda+\rho}(a_1;x-z-1)$$
$$= \Psi_{\lambda+\rho+1,\,\iota-\rho} \qquad (\rho = 1, \ldots \iota) \quad \ldots \quad (52),$$

so daß gezeigt ist, daß tatsächlich $\Psi_{\iota,\lambda+1}$ nur von der Indizessumme abhängt und außerdem der Rekursion (29) genügt; somit ist:

$$\Psi_\nu(x) = \psi_\nu(a_1+a_2;x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53).$$

Es ergibt sich also gemäß (48):

Wenn man die Faltung $\mathfrak{w}_2$ zweier Verteilungen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, deren ψ-Reihen die Koeffizienten α_ν, β_ν besitzen, in eine ψ-Reihe mit den Koeffizienten γ_ν entwickelt $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so bestehen die Beziehungen:

$$\gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_2\,\alpha_{\nu-2} + \beta_3\,\alpha_{\nu-3} + \ldots + \beta_\nu$$

bzw. es gilt identisch in x:

$$1 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \ldots = (1 + \alpha_2 x^2 + \ldots)\cdot(1 + \beta_2 x^2 + \ldots) \quad \ldots \quad (54).$$

Dabei sind die Parameter der drei Reihen die Mittelwerte der drei Verteilungen, also a_1, a_2 und $a_1 + a_2$.

Entsprechend gilt identisch in x, wenn $\mathfrak{w}_n$ das Resultat einer $(n-1)$-fachen Faltung, vorgenommen an den Funktionen $\mathfrak{v}_1, \ldots \mathfrak{v}_n$, bedeutet:

$$\mathfrak{w}_n(x) = \sum_{z_1}\sum_{z_2}\ldots\sum_{z_{n-1}} \mathfrak{v}_1(z_1)\,\mathfrak{v}_2(z_2)\ldots\mathfrak{v}_n(x-z_1-\ldots-z_{n-1}) \quad . \quad . \quad (55),$$

sobald man jedes der $\mathfrak{v}_\nu$ in seine (ausgezeichnete) ψ-Reihe mit dem Mittelwert a_ν als Parameter und den Koeffizienten $\alpha_\iota^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots n)$, $(\iota = 0, 2, \ldots)$ entwickelt, und $\mathfrak{w}_n(x)$ die Koeffizienten γ_ι und den Parameter $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ hat, identisch in x:

$$1 + \gamma_2 x^2 + \ldots = (1 + \alpha_2^{(1)} x^2 + \ldots)(1 + \alpha_2^{(2)} x^2 + \ldots)\ldots(1 + \alpha_2^{(n)} x^2 + \ldots) \quad (54').$$

Den bisherigen Resultaten dieser Nummer entsprechen ganz analoge hinsichtlich der φ-Reihe (Brunsschen Reihe) der n-ten Faltung. Aber die nun folgenden Ueberlegungen werden einen wesentlichen Unterschied der beiden Fälle zeigen.

Man kann nämlich im Falle stetiger Funktionen die Faltung w_n in ihre φ-Reihe entwickeln (wobei die Koeffizienten derselben formal genau so aus den Entwicklungskoeffizienten der $v_1 \ldots v_n$ abzuleiten sind wie in unserem Falle) und sodann den Laplaceschen Grenzübergang durchführen, d. h. mit n so gegen unendlich gehen, daß gleichzeitig Mittelwert und Streuung von w_n unbegrenzt wachsen. Dann zeigt sich, daß sämtliche Koeffizienten dieser φ-Reihe, mit Ausnahme des ersten, im limes gegen Null gehen und daß sich die ganze Reihe im limes auf das erste Glied, welches gleich $\varphi \cdot 1$ ist, reduziert. Dies bietet dort eine Möglichkeit zur Ableitung des allgemeinen »Fehlergesetzes« (Fundamentalsatzes), das nur von zwei Konstanten (dem Mittelwert und der Streuung) abhängt.

Führt man aber hier für die ψ-Reihe der $(n-1)$-ten Faltung $\mathfrak{w}_n(x)$, deren Koeffizienten gemäß (54') aus den Koeffizienten der ψ-Reihen der $\mathfrak{v}_1, \ldots \mathfrak{v}_n$ gewonnen werden, den Poissonschen Grenzübergang durch, (bei dem die Voraussetzung gemacht wird, daß die Einzelwahrscheinlichkeiten aller »seltenen Ereignisse« zusammen so klein sind, daß sie wie $1/n$ gegen Null gehen), [vergl. Nr. 2], so zeigt die ψ Reihe ein ganz anderes Verhalten, als man nach Analogie mit der φ-Reihe vermuten würde. Beim Grenzübergang reduziert sich die Reihensumme keineswegs auf das erste Glied. Dies letztere geschieht nur im Falle einer einfachen Alternative, mit $\mathfrak{v}_\nu(0) = p_\nu$, $\mathfrak{v}_\nu(1) = q_\nu$; $p_\nu + q_\nu = 1$ $(\nu = 1, \ldots n)$. Schon bei dreiwertiger Verteilung bleiben unendlich viele Glieder der Reihe, die im limes nicht gegen Null gehen. Wir wollen diese Verhältnisse an dem einfachen Falle der dreiwertigen Verteilung verfolgen, da es für allgemeine m-wertige Verteilungen prinzipiell genau so ist, und wollen sogar, da es auf die Verschiedenheit der $\mathfrak{v}_\nu$ jetzt nicht ankommt, sie der Kürze halber für dieses Beispiel alle als gleich annehmen, so daß sich (54') auf:

$$1 + \gamma_2 x^2 + \ldots = (1 + \alpha_2 x^2 + \ldots)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54'')$$

reduziert. Demgemäß erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_2 = n\,\alpha_2, \quad \gamma_3 = n\,\alpha_3, \quad \gamma_4 = n\,\alpha_4 + \binom{n}{2}\alpha_2^2, \quad \gamma_5 = n\,\alpha_5 + 2\binom{n}{2}\alpha_2\,\alpha_3 \\ &\gamma_6 = n\,\alpha_6 + 2\binom{n}{2}\alpha_2\,\alpha_4 + \binom{n}{2}\alpha_3^2 + \binom{n}{3}\alpha_2^3, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (56).$$

Da aber nach (43)

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{a^{k-2}}{(k-2)!}\left[\mathfrak{v}(2) - \frac{a^2}{k}\right] \quad \text{mit} \quad a = \mathfrak{v}(1) + 2\,\mathfrak{v}(2) = q + 2\,r,$$

so sieht man, daß in $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6, \ldots$ jeweils ein Bestandteil auftritt, der bei wachsendem n oberhalb einer endlichen Schranke bleibt, nämlich:

$$n\,r \text{ in } \gamma_2; \quad \binom{n}{2} r^2 \text{ in } \gamma_4; \quad \binom{n}{3} r^3 \text{ in } \gamma_6 \quad \text{usf.}$$

Denn es ist z. B. $\gamma_2 = n\,r - \frac{n\,a^2}{2}$, und da $n\,a$ beim Grenzübergang endlich bleibt, geht $n\,a^2 \to 0$, aber $n\,r$ nicht! Alle diese Bestandteile rühren, wie man sieht, daher, daß der eine Koeffizient $\alpha_2 = r - a^2/2$ ein mit der 0-ten Potenz von a multipliziertes Glied enthält. Wäre $\mathfrak{v}(x)$ vierwertig, so würden nicht nur in α_2, sondern in α_2 und α_3 gemäß (35') solche mit der 0-ten Potenz von a multiplizierte Bestandteile auftreten, welche von $\mathfrak{v}(2)$ und $\mathfrak{v}(3)$ herrühren. Bei der n-ten Faltung würde dann schon jeder Koeffizient derselben — nicht nur, wie im Falle der Summenbildung aus dreiwertigen Verteilungen, jeder zweite — solche beim Grenzübergang endlich bleibende Bestandteile aufweisen.

Man könnte nun in diesem Spezialfall das Resultat von Abschnitt **2** zu verifizieren suchen, indem man in der ψ-Reihe für $\mathfrak{w}_n(x)$ die Summe aller Glieder bildet, die bei wachsendem n endlich bleiben[1]). Im Falle der Summenbildung aus dreiwertigen Verteilungen wäre die Summe:

$$[1 + p_2(na;x) \cdot nr + p_4(na;x) \cdot \binom{n}{2} r^2 + p_6(na;x) \cdot \binom{n}{3} r^3 + \ldots]\, \psi_0(na;x) \quad (57)$$

zu betrachten. Tatsächlich findet man, wenn man auf diese Weise den Grenzübergang verfolgt — wenn auch auf umständlichem Wege — die in **2.** abgeleitete allgemeine Poissonsche Formel (23) wieder. 778

Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln. III.[2])

Von **ALEXANDER FISCHER** in Göding (Mähren).

I. Theoretischer Teil.

1. Fluchtlinientafeln auf beliebigen Flächen: Problemstellung. Wie bereits im ersten Teile (zitiert als »I« und »II«), gezeigt wurde, wird die durch die Gleichungen (I) bis (III), der »Ablesegeraden«, der »Lösenden Kurve« und der »Bezifferung« bestimmte Zuordnungsbeziehung nicht gestört, wenn man die daselbst zunächst eingeführten Koordinaten in verschiedener, ganz bestimmter Weise transformiert, indem man neue Koordinaten einführt. Es steht nichts im Wege, diese letzteren als krummlinige, Gaußsche Koordinaten zu deuten, man hat dann bereits die Theorie der Fluchtlinientafeln auf einer Fläche. Das hier vorliegende Problem kann in seiner allgemeinsten Form folgendermaßen ausgesprochen werden: Es sei eine Fläche vorgelegt; kann auf ihr eine — zweiparametrige — Kurvenschar bestimmt werden, die die Rolle der Ablesegeraden übernimmt, die also den verschiedenen Geraden der Ebene entspricht? Diese allgemeine Form des Problems dürfte aber der Lösung große Schwierigkeiten entgegensetzen. Es kommt daher zunächst folgende Problemfassung in Frage: Es sei eine Fläche vorgelegt; kann man sie auf die Ebene derart abbilden, daß eine bestimmte Kurvenschar auf ihr den verschiedenen Geraden der Ebene entspricht? Für die »bestimmte Kurvenschar« kämen nun die in der Theorie der Flächen behandelten Kurvenscharen auf den Flächen, d. s. Krümmungskurven, Asymptotenkurven und geodätischen Linien in Betracht. Die beiden ersteren sind, da durch Differentialgleichungen erster Ordnung[3]) bestimmt, von vornherein von der Betrachtung auszuschließen, nicht jedoch die geodätischen Linien, die durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung[3]) bestimmt, überdies noch den großen Vorzug leichter mechanischer Realisierbarkeit (gespannter Faden auf der Fläche!) genießen.

Es ist nun ein sehr glücklicher Umstand, daß dieses Problem bereits seit längerer Zeit völlig gelöst vorliegt. E. Beltrami stellte und löste 1866 folgendes Problem, auf das er durch die Theorie der geographischen Karten geführt worden war[4]):

Es sei eine Fläche gegeben; kann man sie auf die Ebene derart abbilden, daß die geodätischen Linien der Fläche den verschiedenen Geraden der Ebene entsprechen?

Es seien x und y die geradlinigen — rechtwinkligen oder schiefen — Koordinaten eines Punktes der Ebene und λ, μ die krummlinigen Koordinaten des entsprechenden Punktes der Fläche.

Die Formeln, die das Entsprechen zwischen den Punkten der Ebene und jenen der Fläche darstellen, seien

$$x = \Theta(\lambda, \mu), \qquad y = \nu(\lambda, \mu).$$

---

[1]) Dabei ist zu beachten, daß die Bezeichnungen jetzt (von Abschn. **4** an) andere sind als in Abschn. **2**. a heißen jetzt die Mittelwerte der Verteilungen, die dort b hießen und keine besondere Rolle spielten; während a dort die in (2) gegebene Bedeutung hatte, und diese Summen (2) treten wieder hier nicht explizite auf. Was z. B. jetzt in (57) (na) heißen muß, wäre in der Bezeichnung von **2.** als $a_1 + 2a_2$ zu schreiben.

[2]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), H. 3 und H. 5.

[3]) S. F. Klein (2), S. 7.

[4]) Nach G. Darboux (1c), S. 41ff. (Nr. 597).

Jeder Geraden der Ebene, die durch die Gleichung

$$a x + b y + c = 0$$

dargestellt wird, wird eine Kurve der Fläche entsprechen, die ebenfalls durch die Beziehung

$$a\,\Theta(\lambda, \mu) + b\,\nu(\lambda, \mu) + c = 0$$

definiert wird. Es wird notwendig sein, daß diese Gleichung eine geodätische Linie darstelle und daß sie folglich, indem man darin a/c, b/c als willkürliche Konstanten ansieht, das allgemeine Integral der Differentialgleichung 2. Ordnung der geodätischen Linien ergibt. Das Problem von E. Beltrami wird also unmittelbar auf das folgende zurückgeführt:

Es ist zu untersuchen, ob die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien auf die Form

$$a\,\Theta + b\,\nu + c = 0$$

gebracht werden kann, worin a, b, c willkürliche Konstanten und Θ, ν Funktionen der krummlinigen Koordinaten λ, μ bedeuten.

Nach den hierfür durchgeführten Rechnungen[3]) ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung:

Die einzigen Flächen, die eine Lösung des gestellten Problems ergeben, sind jene, deren Totalkrümmung (Gaußsches Krümmungsmaß) K konstant ist[1]).

Dieser Satz ist im wesentlichen mit dem folgenden identisch[2]):

Auf jeder Fläche von konstanter Totalkrümmung gibt es solche Parameter, in denen die geodätischen Linien der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung zwischen den Parametern dargestellt werden.

Es möge aber auf folgenden nicht unwichtigen Unterschied zwischen den beiden hier vorliegenden Problemen aufmerksam gemacht werden. Bei dem Problem der geographischen Kartenprojektion wird die Eigenschaft der geodätischen Linie benutzt, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Fläche darzustellen; es ist also eine metrische (Längen-)Beziehung, auf die es hier ankommt. Bei der Nomographie spielt hingegen die formale Gestalt der Gleichung der Ableselinien die Hauptrolle. Es ist also nicht das Hauptgewicht darauf zu legen, daß diese Linien gerade geodätische Linien sind und nur die gewissermaßen zufällige Tatsache, daß für dieselben das vorgelegte Problem bereits gelöst ist, erklärt, daß dieselben zuerst behandelt werden können. Es entstehen da sofort neue Fragen, ob z. B. die in »I« behandelten Tafeln im logarithmischen System, oder mit Konchoide usw. als Ableselinie geodätische Abbildungen einer bestimmten Fläche konstanter Totalkrümmung sind und welche dies ist usw.

2. Fluchtlinientafeln auf der Pseudosphäre. Zu den Flächen konstanter Krümmung gehören für $K = 0$ außer der Ebene die abwickelbaren Flächen — auf die aber nicht weiter eingegangen werden soll —, ferner für $K = 1$ die Kugel, die beide in »I« bereits behandelt worden sind. Insbesondere findet die dort überraschende Tatsache der Uebereinstimmung der Gleichung der Kugelgeraden mit jener der Ebene ihre naturgemäße Erklärung. Im folgenden soll nun eine Fläche mit negativem Krümmungsmaß ($K = -1$) behandelt werden, und zwar bloß ihre geodätische Abbildung auf die Ebene, d. i. jene Abbildung, bei der den geodätischen Linien auf der einen Fläche ebensolche Linien auf der anderen entsprechen.

Hierfür gibt G. Darboux (1c)[3]) zwei Arten, und zwar

1. die Abbildung von H. Poincaré[4]) und
2. die Abbildung von E. Beltrami.

Bei der ersteren werden die geodätischen Linien als Kreise, bei der letzteren als Geraden in der Ebene abgebildet. Es werden beide nomographisch brauchbare Ergebnisse liefern, und zwar gelangt man bei der ersteren Abbildung zu einer Verallgemeinerung der Tafeln mit äquidistanten Punkten von N. Gercevanoff (s. u.), bei der letzteren ergeben sich neuartige Tafeln mit Parallelenschar bzw. Rechtwinkelkreuz als allgemeinen Ablesegeräten.

Die Pseudosphäre[5]) (s. Abb. 1) ist jene Fläche konstanter negativer Krümmung, die durch Drehung der Traktrix um die Grundlinie entsteht.

---

[1]) S. W. Blaschke (1), S. 126, Aufg. 13.
[2]) S. G. Scheffers (1), S. 416, Satz 9.
[3]) S. 394 ff.
[4]) Vergl. jedoch R. Bonola-H. Liebmann (1), S. 134, Fußnote 2.
[5]) S. z. B. letztgenanntes Werk, S. 132.

a) **Abbildung von H. Poincaré:** Wie die von G. Darboux (1c)[1] ausgeführten Rechnungen zeigen, ergibt sich als Gleichung der Abbildung der allgemeinsten geodätischen Linien auf der Fläche in der Ebene die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,b\,x - c = 0\,,$$

worin b, c willkürliche Konstanten bedeuten, also Kreise. Diese Gleichung kann, auf die Form

$$(x - b)^2 + y^2 = b^2 + c = b^2 - (-c) = r^2$$

gebracht, nomographisch folgendermaßen verwertet werden: Der Mittelpunkt des Kreises liegt stets auf der x-Achse, der Halbmesser ist als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus b und $\sqrt{c}\,(c > 0)$, welche Größe auf der y-Achse aufgetragen wird, mit dem Stechzirkel abzugreifen.

Ist $c < 0$, so ergibt sich aus

$$b^2 = r^2 + (-c)$$

zunächst die Konstruktion von r aus der $\sqrt{c}$-Leiter mittelst einer Stechzirkelstellung; mit dem gefundenen r ist nunmehr wie bei $c > 0$ vorzugehen. Da der Mittelpunkt des Ablesekreises stets auf der x-Achse liegt, kann als Ablesegerät eine Geradenbildtafel mit konzentrischen Kreisen verwendet werden und ein eindimensionaler Rechenschieber konstruiert werden.

RA 750 Z 1

Abb. 1.

Die Transformationsgleichungen für die »Abbildung von H. Poincaré« lauten also

$$\xi = \mu_1 \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \qquad \eta = \frac{\mu_2}{x^2 + y^2}\,,$$

(μ_1, μ_2 ∸ Maßstabfaktoren); es ist also die Transformation quadratisch. [Auch die — hier nicht weiter zu behandelnde — allgemeinere quadratische Abbildung gemäß

$$x^2 + y^2 + b\,(x + \mu\,y) + c = 0$$

(μ = beliebig, aber fest) ergäbe nomographisch brauchbare Ergebnisse].

Wie bei den Tafeln von N. Gercevanoff sind auch hier gewisse Mißstände[2] zu verzeichnen, die die Brauchbarkeit dieser Tafeln vermindern. Es möge noch erwähnt werden, daß die Abbildung von H. Poincaré konform ist, welcher Umstand aber auch hier anscheinend weniger wichtig ist.

b) **Abbildung von E. Beltrami.** Diese geht gemäß G. Darboux[3] (1c) aus der ersteren durch die Transformation

$$x = \frac{X}{1 - Y}\,, \qquad \eta = \frac{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}}{1 - Y}$$

hervor. Die im vorstehenden angeschriebenen Transformationsgleichungen gehen für die »Abbildung von E. Beltrami« in folgende über:

$$\xi = \frac{\mu_1\,x}{1 + y}\,, \qquad \eta = \mu_2\,\frac{1 - y}{1 + y}$$

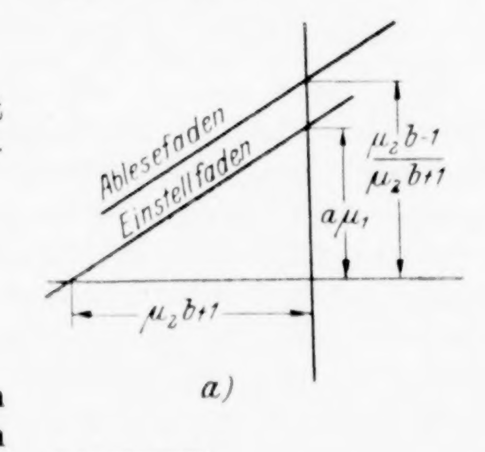
(μ_1, μ_2 ∸ Maßstabfaktoren). Es geht dann die Gleichung der Ablesegeraden

$$a\,\xi + b\,\eta = 1$$

über in

$$y = \frac{a\,\mu_1\,x}{b\,\mu_2 + 1} + \frac{b\,\mu_2 - 1}{b\,\mu_2 + 1}\,.$$

Man erhält also, wenn man die in dieser Gleichung vorkommenden Größen in einem kartesischen System deutet, Tafeln mit Parallelenschar (s. Abb. 2a) bzw. mit Rechtwinkelkreuz (s. Abb. 2b) als Ablesegerät.



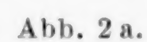


Abb. 2a.

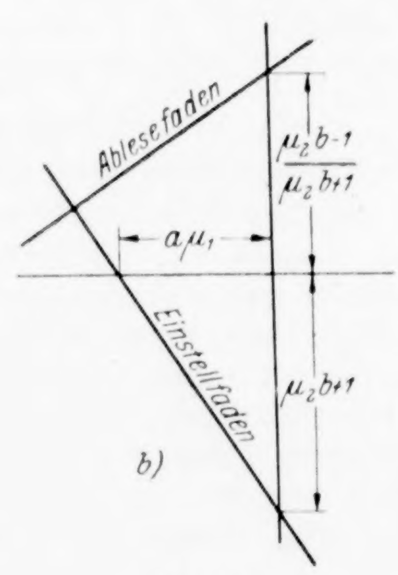


Abb. 2b.

[1]) S. 400 (Nr. 786).

[2]) S. M. d'Ocagne (1), S. 392; H. Schwerdt (1), S. 246.

[3]) S. 419 (Nr. 801).

Im ersteren Fall gibt der »Einstellfaden« die Richtung an, während der »Ablesefaden« durch den Punkt $\frac{b\mu_2 - 1}{b\mu_2 + 1}$ auf der y-Achse hindurchgeht; im zweiten Fall ist der »Einstellfaden« um $\pi/2$ gegen den »Ablesefaden« gedreht. Der Nachteil dieser Tafeln ist der, daß sich bei drei Veränderlichen für eine derselben (b) ein überzähliges System ergibt, so daß diese nicht als gesuchte Größe auftreten darf. — Oft kann auch von der Schreibweise

$$\frac{a\mu_1}{1 + b\mu_2} = \frac{\frac{1}{b\mu_2 + 1}}{\frac{1}{a\mu_1}}$$

mit Vorteil Gebrauch gemacht werden. Die zur Einstellung dienende Leiter des überzähligen Systems wird in den Anwendungen durch den Zeiger e gekennzeichnet werden.

3. Parallelenschar (Rechtwinkelkreuz) als allgemeine Ablesegeräte. Bei Betrachtung der Abbildung von E. Beltrami ergab sich nachträglich die nomographische Brauchbarkeit der folgenden Form der Gleichung der Ablesegeraden

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}.$$

Wie leicht ersichtlich, kann jede Fluchtlinientafel mit Ablesegerade (für die kanonischen Formen I bis IV_0 insbesondere) ohne weiteres als solche mit den hier behandelten Ablesevorrichtungen konstruiert werden. Wie in den Anwendungen gezeigt werden wird, lassen sich viele der von M. d'Ocagne, R. Soreau und insbesondere von dem Urheber dieser Tafelklasse, M. Béghin zur Demonstration gewählten Beispiele auch nach dem hier gewählten Gesichtspunkt darstellen. Da die Vertafelung also bloß auf einer veränderten Schreibweise der Gleichung der Ablesegeraden beruht und die Gleichungen der Lösenden Kurve bzw. deren Bezifferung keine Aenderung erleiden, ist hierüber nichts weiter zu sagen; die Anwendungsbeispiele werden gemäß »I« vollkommen verständlich sein.

Wie in »I« bereits angegeben, unterscheidet R. Soreau (1a)[1]) bei der Anwendung der Doppelfluchtung erster Art auf Gleichungen mit drei Veränderlichen drei Möglichkeiten; die erste und dritte wurden daselbst in Kürze behandelt. Wie leicht einzusehen, ist durch die eben besprochenen Tafeln der zweite, hier noch nicht behandelte Fall der »Verdoppelung einer Veränderlichen (z_1) mit zwei Kurven (z_1) für diese Veränderliche« verallgemeinert. In den Anwendungen werden die von R. Soreau (1a) gewählten Beispiele, deren eines von M. Béghin herrührt, ebenfalls gegeben werden. — Es möge schließlich erwähnt werden, daß M. d'Ocagne (1)[2]) bei der Aufstellung der kanonischen Form für diese Tafeln für Beziehungen zwischen vier Veränderlichen ausdrücklich bemerkt, daß, wenn man $z_1 \equiv z_4$ setzt, man auf eine Darstellungsmöglichkeit für eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen kommt, in der dieser Veränderlichen zwei Leitern entsprechen. Er erinnert auch daran, daß diese Veränderliche z_1 nicht als Unbekannte auftreten darf. Als alleinige Beispiele bringt er die im folgenden ebenfalls gegebenen Tafeln für die Berechnung der Böschungsmauern (für drei Veränderliche) und für die Bazinsche Formel (für vier Veränderliche) (s. »II«)[3]).

4. Verschiedene Fragestellungen. Im folgenden soll auf einige offene Fragen in Kürze hingewiesen werden, deren Beantwortung vielleicht neue Ergebnisse liefern würde.

a) Ueber ein Koordinatensystem. Wie aus der derzeit vorhandenen Literatur ersichtlich, sind außer den kartesischen Punktkoordinaten, Polarkoordinaten, sowie M. d'Ocagneschen Parallelkoordinaten keine anderen Koordinatensysteme in der Nomographie in Verwendung. Gemäß dem in der vorliegenden Arbeit behandelten ist die formale Darstellung der zur Anwendung gelangenden Ablesekurve für die Theorie der Fluchtlinientafeln von ausschlaggebender Bedeutung; hierbei wurden bloß die kartesischen Systeme benutzt. Es wären nun die weiteren Koordinatensysteme in der angezeigten Richtung zu untersuchen. Es sei bloß in Kürze auf ein von G. Darboux (2)[4]) nur beiläufig erwähntes System, »un système qui n'est, pour ainsi dire, jamais employé,

[1]) S. 355.

[2]) S. 366.

[3]) Anm. bei der Korr.: Vergl. hierzu C. v. Dobbeler, Vierskalige Nomogramme. Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), H. 6.

[4]) S. 171.

celui des coordonnées biangulaires« hingewiesen. Wählt man nämlich in einer Ebene drei Grundpunkte α, β, M und betrachtet die Winkel $M\alpha p$ und $M\beta p$ als Biangularkoordinaten eines Punktes p, so stellt die Gleichung

$$A \operatorname{cotg}(p\,\alpha\,M) + B \operatorname{cotg}(p\,\beta\,M) = \text{konst.},$$

wobei A, B passend gewählte Konstanten sind, einen Kegelschnitt dar, der durch die drei Punkte p, α, β hindurchgeht. G. Darboux geht auf diese »curieuse rélation« nicht weiter ein.

b) Ueber zwei Transformationen der Geradengleichung. Obwohl anscheinend ohne nomographische Anwendbarkeit, sollen des Interesses halber die folgenden beiden formalen Transformationen der Geradengleichung gegeben werden.

Führt man in der Gleichung der Geraden

$$a\,\xi + b\,\eta = 1$$

die Transformation $\xi = \frac{1}{\mu}\log x\,,\qquad \eta = \frac{1}{\mu}\log \eta\,,\qquad (\mu = \text{konst.})$

durch, so erhält man: $$x^a\,y^b = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)},$$

also im kartesischen System gedeutet, höhere Kurven. Führt man weiter in (A) ein

$$x = \frac{x_1}{x_3}\,,\qquad y = \frac{x_2}{x_3}\,,$$

so erhält man, wenn x_i $(i = 1, 2, 3)$ als Dreieckskoordinaten deutet:

$$x_1{}^a\,x_2{}^b\,x_3{}^c = C\,.\qquad (a + b + c = 0)\,.$$

Es ist dies die Gleichung der von F. Klein - S. Lie untersuchten W-Kurven[1]. Es ergeben sich also in beiden Fällen Tafeln mit fallweise veränderlichen Ablesekurven (vergl. auch »I«).

c) Zur Theorie der Netztafeln. Bekanntlich sind die ersten Netztafeln für drei Veränderliche als Darstellungen von Flächen durch Niveaulinien[2] erklärt worden, welche Erklärung ja am naturgemäßesten ist. Es ist der unbestreitbare Vorteil solcher Netztafeln gegenüber den Fluchtlinientafeln, daß die Fläche, in der sie die vorgelegte Funktion darstellen, in beliebiger Weise deformiert werden kann, ohne daß die zugrundegelegte Zuordnungsbeziehung gestört werde. Es möge nun auf eine anscheinend noch nicht behandelte andere Deutung in Kürze hingewiesen werden. Wird nämlich das aus den drei Kurvenscharen bestehende Gebilde aus undehnbaren, festgeknoteten Fäden hergestellt und aus seiner Fläche herausgenommen, so kann es als Gewebe (Netz) betrachtet werden. Es wäre die Theorie der Gewebe[3] heranzuziehen, wodurch sich vielleicht neue Darstellungsarten erzielen ließen. Insbesondere erhebt sich die Frage, ob sich außer der ursprünglichen und der auf sie abwickelbaren Flächen noch andere Flächen mit diesem Gewebe »bekleiden« ließen.

5. Die kanonischen Formen für Beziehungen zwischen drei Veränderlichen. Da in »I« gezeigt wurde, daß die kanonischen Formen für Beziehungen zwischen drei Veränderlichen die Grundlage für die übrigen Tafelformen bilden, so sollen im nachstehenden bloß die ersteren ausführlicher behandelt werden. Für die allgemeineren Gleichungsformen sowie die Tafeln für die Beziehungen zwischen mehr als drei Veränderlichen werden die Anwendungen im zweiten Teile dieser Arbeit ohne weiteres verständliche Tafeln bringen. Es möge nur kurz darauf hingewiesen werden, daß die Tafeln mit kreisförmiger Ableselinie in nahe Beziehung zu den L. Mascheronischen Konstruktionen mit ausschließlicher Benutzung des Zirkels[4] treten, worauf an passender Stelle näher eingegangen werden wird. Im übrigen sind die kanonischen Formen in ihrer einfachsten Gestalt gewählt worden, sowie meist von der ausdrücklichen Einführung von Maßstabfaktoren abgesehen und auch nicht alle Möglichkeiten bei der Transformation besprochen worden.

---

[1] Siehe F. Klein (2), S. 166.

[2] Siehe R. Mehmke (2), S. 1128.

[3] Vergl. W. Blaschke (1), S. 138 (daselbst weitere Literatur); ferner G. Darboux (1c), Nr. 643, S. 133.

[4] Vergl. hierzu F. Klein (2), S. 36. — E. Pascal - H. E. Timerding (1a), S. 46. — Ferner Th. Vahlen (1), S. 56.

I. **Kanonische Form**[1] $f_1 + f_2 = f_3$.

α) Abb. v. H. Poincaré: **Es ergibt sich als**

Gl. d. A.K. $f_1 \frac{\mu_1 x}{x^2 + y^2} + f_2 \frac{\mu_2}{x^2 + y^2} = 1$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $\mu_1 x = \mu_2$ . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $\mu_2 f_3 = x^2 + y^2$ . . . . (III).

β) Abb. v. E. Beltrami:

Gl. d. A.F. $f_1 \frac{\mu_1 x}{1+y} + f_2 \frac{\mu_2 (1-y)}{1+y} = 1$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $\mu_1 x = (1 - y)\mu_2$ . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $\mu_2 f_3 = \frac{1+y}{1-y}$ . . . . (III).

II. Kanonische Form $f_1 f_2 + f_3 = 0$.

α) Abb. v. H. Poincaré:

Gl. d. A.K. $(f_2 + a) \frac{\mu_1 x}{x^2 + y^2} + f_3 \frac{\mu_2}{x^2 + y^2} = 1$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $a \frac{\mu_1 x}{x^2 + y^2} = 1$ . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $\mu_2 f_1 = \mu_1 x$ . . . . (III).

β) Abb. v. E. Beltrami:

Gl. d. A.F. $(f_2 + a) \frac{\mu_1 x}{1+y} + f_3 \frac{\mu_2 (1-y)}{1+y} = 1$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $a \frac{\mu_1 x}{1+y} = 1$ . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $f_1 = \frac{\mu_1 x}{\mu_2 (1-y)}$ . . . . (III).

III. Kanonische Form $f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3$.

Auf diese Form werde ebenso wie in »I« aus den dort dargelegten Gründen nicht weiter eingegangen.

IV$_0$. Kanonische Form $f_1 + f_2 + f_3 g_1 = 0$.

α) Abb. v. H. Poincaré: Für diese kanonische Form finden sich in der Literatur bereits Beispiele vor, und zwar bei den schon erwähnten Tafeln von N. Gercevanoff[1]. Es möge einiges über das Verhältnis der hier behandelten Tafeln zu jenen gesagt werden. Der Urheber bezeichnet sie als Nomogramme »mit äquidistanten Punkten«[2]. Neben einer Mittelskala, auf der die eine Zirkelspitze eingesetzt wird, befinden sich zwei weitere Leitern, durch deren eine die andere Zirkelspitze festgelegt wird. Der hierdurch bestimmte Kreis schneidet auf der dritten Leiter die gesuchte Lösung aus. Auch im vorliegenden Falle sind es drei Skalen. Der Unterschied gegenüber den Nomogrammen von N. Gercevanoff ist folgender: Die kanonische Form[3] für diese Nomogramme enthält infolge der Parameterdarstellung der Leitern sechs Parameter. Schreibt man drei Bedingungen für die Parameter vor, so können in der Tat die kanonischen Formen

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad \text{und} \quad f_1 + f_2 + f_3 g_1 = 0$$

hergeleitet werden, wobei sich aber noch gewisse, durch das Wesen der quadratischen Transformation bedingte Einschränkungen ergeben. Im vorliegenden Falle hingegen ergeben sich die drei Skalen ganz naturgemäß, wie bei den anderen Transformationen, als Achsenabschnitte bzw. Ersatzkurven und Lösende Kurven.

Es ergibt sich als

Gl. d. A.K. $f_1 \frac{\mu_1 x}{x^2 + y^2} + f_2 \frac{\mu_2}{x^2 + y^2} = 1$ . . . . (I),

---

[1] Es werden folgende Abkürzungen benutzt (siehe »I«): Gl. = Gleichung, Abb = Abbildung, A.G. = Ablesegerade, A.F. = Ablesefaden, A.K. = Ablesekreis, L.K. = Lösende Kurve, E.K. = Ersatzkurve, Bez. = Bezifferung.

[2] Vergl. hierzu M. d'Ocagne (1), (2), R. Soreau (1b), P. Luckey (2), (3), (4). Es war mir leider nicht möglich, in die Originalschrift Einsicht nehmen zu können.

[3] M. d'Ocagne (1), S. 390, Gl. (1').

Gl. d. L.K. $\frac{g_3}{f_3} = -\frac{\mu_1 x}{x^2+y^2}$

und deren Bez. $\frac{1}{f_3} = -\frac{\mu_2}{x^2+y^2}$ . . . . (II), (III).

Es möge schließlich bemerkt werden, daß unabhängig von N. Gercevanoff auch A. Adler[1]) und H. Fürle (1)[2]) diese Tafelform mit äquidistanten Punkten ins Auge gefaßt haben.

β) Abb. v. E. Beltrami:

Gl. d. A.F. $f_1 \frac{\mu_1 x}{1+y} + f_2 \frac{\mu_2(1-y)}{1+y} = 1$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $\frac{g_3}{f_3} = -\frac{\mu x}{1+y}$ . . . . (II),

und deren Bez. $\frac{1}{f_3} = -\frac{\mu_2(1-y)}{1+y}$ . . . . (III).

IV. Kanonische Form $f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0$

α) Abb. v. H. Poincaré: Es ergibt sich als

Gl. d. E.K. $\mu_1^2 x^2 = \mu_2(x^2+y^2)$

insbesondere für $\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad y = 0$ . . . . (I),

deren Bez. erfolgt nach $f_i = \frac{x^2+y^2}{\mu_1 x} \cdot (i = 1,2)$ . . . . (I'),

Gl. d. L.K. $\frac{g_3}{h_3} = -\frac{\mu_1 x}{x^2+y^2}$

und deren Bez. $\frac{f_3}{h_3} = \frac{\mu_2}{x^2+y^2}$ . . . . (II), (III).

β) Abb. v. E. Beltrami:

Gl. d. E.K. $\mu_1^2 x^2 = \mu_2(1-y^2)$

insbesondere für $\mu_1 = \mu_2 = 1 : x^2 + y^2 = 1$ . . . . (I),

deren Bez. erfolgt nach $f_i = \frac{1+y}{\mu_1 x}, \quad (i = 1,2)$ . . . . (I'),

Gl. d. L.K. $\frac{x}{1+y} = -\frac{g_3}{h_3}$

und deren Bez. $\frac{1-y}{1+y} = \frac{f_3}{h_3}$ . . . . (II), (III).

Es artet also bei der Abb. α) der Kegelschnitt in eine Doppelgerade aus; bei der Abb. β) entsteht eine Ellipse bzw. ein Kreis, die aber mit den bereits bekannten Tafeln dieser Art nicht identische Tafeln ergeben.

V. Kanonische Form $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = f_3$

α) Abb. v. H. Poincaré: Es ergibt sich als

Gl. d. A.K. $M\frac{\mu_1}{x^2+y^2} + N\frac{\mu_2 x}{x^2+y^2} + 1 = 0$ . . . . (I),

Gl. d. L.K. $f_2 = -\frac{x^2+y^2}{\mu_1}$ . . . . (II),

und deren Bez. $g_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} x$ . . . . (III),

Gl. d. E.K. $f_1 = -\frac{x^2+y^2}{\mu_1}$

und deren Bez. $g_1 = -x\frac{\mu_2}{\mu_1}$ . . . . (I').

Auf der x-Achse ist $\mu_2 f_3$ aufzutragen.

[1]) S. P. Luckey (3). — [2]) S. 8, (Tafel 1).

Es möge bemerkt werden, daß dies die einzige Transformationsgleichung ist, die überhaupt nomographisch brauchbar ist. ($N \equiv f_3$ muß auf die x-Achse kommen!) Als allgemeines Beispiel werde die kanonische Form I ($g_1 + g_2 = g_3$) in der Gestalt

$$g_1 = \frac{g_3^2 - g_2^2}{g_3 + g_2}$$

gewählt, da sich hierfür eine weitere Lösungsmöglichkeit für diese Form ergibt und sich an dieses Beispiel weitergehende Folgerungen knüpfen lassen.

β) Abb. v. E Beltrami: Auch hier ergibt die einzige Transformation folgende Gleichungen:

Gl. d. L. K. $\quad \frac{g_1}{f_1} = -\mu_1 \frac{1-y}{1+y}$

und deren Bez. $\quad \frac{1}{f_1} = \frac{\mu_2 x}{1+y}$ . . . . (II), (III),

Gl. d. E. K. $\quad \frac{g_2}{f_2} = -\mu_1 \frac{1-y}{1+y}$

uud deren Bez. $\quad \frac{1}{f_2} = -\frac{\mu_2 x}{1+y}$ . . . . (I').

Auf der y-Achse ist $\frac{\mu_1 f_3 - 1}{\mu_1 f_3 + 1}$ aufzutragen.

6. Elementare Herleitung der beiden Tafelformen mit kreisförmiger Ableselinie für die kanonische Form I: $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Wie aus der Literatur — insbesondere der zur Einführung in die Nomographie dienenden — ersichtlich ist, lassen sich manche elementare Sätze zur Konstruktion von Fluchtlinientafeln heranziehen[1]); und zwar sind dies dann meist Tafeln mit gerader Ableselinie. Es sollen nun nachträglich die für die obige Form aus allgemeinen Gesichtspunkten gewonnenen Tafelformen elementar hergeleitet werden.

I. Es möge zunächst die in »II« gewonnene Tafel mit kreisförmiger Ableselinie neu hergeleitet werden. Trägt man auf den Achsen X, Y (s. Abb. 4 a) in gleichem Maßstab die Größen a und b, auf der unter $\pi/4$ geneigten Geraden die Größe μc auf (μ: sofort zu bestimmender Maßstabwert), so entsteht durch Projektion des Linienzuges $A C' C$ auf $A B$ die Gleichung

$$\mu c = 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = (a + b)\sqrt{2} .$$

Wählt man $\mu = \sqrt{2}$, so entsteht die mit der kanonischen Form identische Gleichung: $a + b = c$.

II. Wird (s. Abb. 4 b) auf einer unter dem Winkel φ gegen die Horizontale geneigten Geraden die b- und c-Leiter in gleichem Maßstab, auf der Wagerechten die a-Leiter im Maßstab $\mu(\varphi)$ aufgetragen, so ergibt sich z. B. folgende Beziehung:

$$r \cos \omega = b + a\,\mu(\varphi) \cos \varphi , \qquad r \cos \omega = c - a\,\mu(\varphi) \cos \varphi ,$$

daher

$$2\,a\,\mu(\varphi) \cos \varphi + b = c.$$

Wählt man $\mu(\varphi) \cos \varphi = 1/2$, so ergibt sich $a + b = c$, im Einklange mit den früheren.

Trägt man b und c in gleicher Richtung von 0 aus auf, so geht die Gleichung in

$$a = b + c$$

über. Es werde erwähnt, daß sich bei H. Fürle (1)[2]) für den Sonderfall $\lg a = \lg b + \lg c$ mit anderer Herleitung die in Abb. 4c gegebene und ohne weiteres verständliche Tafel vorfindet. Der Radius der beiden gleichen Kreise ist beliebig.

[1]) Vergl. z. B. P. Luckey (4), Fr. Schilling 1). — Die Zusammenfassung derartiger elementar-geometrisch-nomographischer Betrachtungen könnte als »Niedere Nomographie« bezeichnet werden. — Vergl. auch meine demnächst in den »Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften« erscheinende kurze Arbeit.

[2]) S. 17 (Tafel 3, Abb. 7). Hier spricht H. Fürle den Gedanken der Umsetzung von Netztafeln in Fluchtlinientafeln folgendermaßen aus: »Auf solche Rechentafeln (mit drei Skalen und zusammengehörigen Skalenpunkten auf einer Geraden) wird man durch die Betrachtung geführt, daß man einem Rechenblatte mit drei Scharen gerader Linien einen beliebigen Kegelschnitt zuordnen und alle Geraden dann als Polaren in bezug auf diesen Kegelschnitt ansehen kann. Jeder Polare entspricht dann ein bestimmter Pol; zeichnet man nun zu sämtlichen Polaren die Pole, so entstehen drei Skalen, und drei durch einen Punkt gehenden Polaren entsprechen dann drei in gerader Linie liegende Pole«. Allerdings geht er auf die nähere Ausarbeitung dieses Gedankens nicht ausführlicher ein.

III. Es möge noch in Kürze untersucht werden, ob sich die letztere Konstruktion auch auf die Kugel übertragen läßt. Durch zweimalige Anschreibung des Cosinussatzes erhält man (s. Abb. 4d):

$$\cos r = \cos a\mu \cos b + \sin a\mu \sin b \cos\gamma\,, \qquad \cos r = \cos a\mu \cos c - \sin a\mu \sin c \cos\gamma\,,$$

daher

$$\cos\gamma \operatorname{tg} a\mu = \operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\,.$$

Die Konstruktion ist nur möglich, wenn $\cos\gamma = 1$, $\gamma = 0$ ist, d. h. der 3. Hauptkreis für a mit jenem für b und c zusammenfällt. Dann ist

$$a\mu = \frac{b-c}{2}\,.$$

Setzt man $\mu = -\,{}^1\!/_2$, so erhält man $c = a + b$ (s. Abb. 4e).

Es ist nun von Interesse, daß diese Konstruktion für alle Flächen konstanten Krümmungsmaßes ebenfalls gilt, wenn man statt des Hauptkreises die geodätische Linie

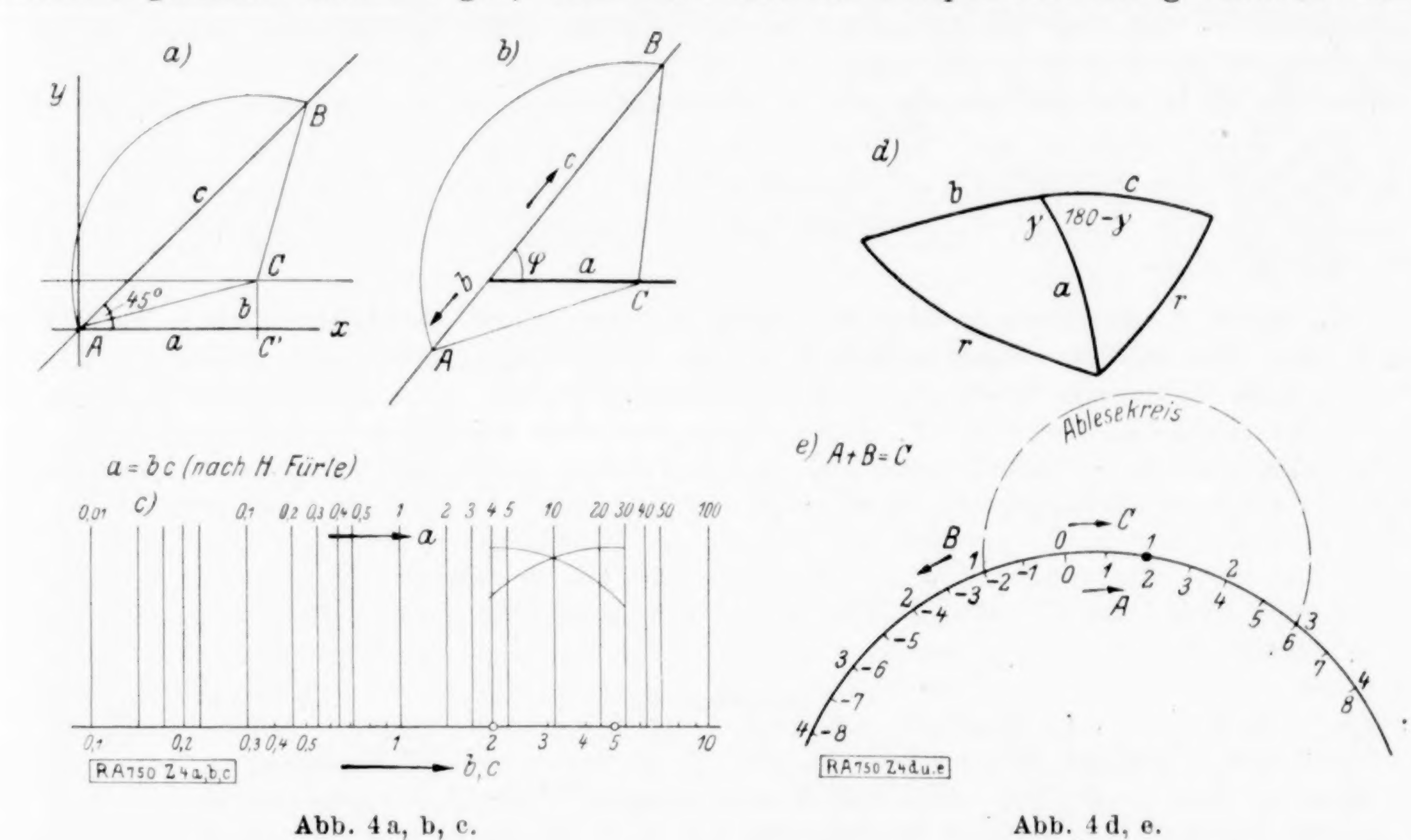


Abb. 4a, b, c. Abb. 4d, e.

wählt. Gemäß G. Darboux (1c)[1]) gelten nämlich für ein geodätisches Dreieck (d. i. ein Dreieck, dessen Seiten aus geodätischen Linien gebildet sind) auf einer Fläche von der konstanten Totalkrümmung $1/R^2$ die fundamentalen Beziehungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C \text{ usw.}\,,$$

worin a, b, c die geodätischen Längen der Seiten und C den Winkel zwischen a, b bezeichnet.

Führt man die Rechnung wie vorhin aus, so ergibt sich der Satz: Auf den Flächen konstanter Totalkrümmung ist auf jeder geodätischen Linie die Beziehung $c = a + b$ darstellbar. Es ist also die Konstruktion eines »metrischen« Nomogramms[2]) mit Faden als deformierbarer Ableselinie möglich. Da insbesondere bei einer Rotationsfläche der Meridian geodätische Linie ist[3]), so gilt dies auch für die Pseudosphäre bzw. Traktrix als Meridian. Das im vorstehenden gefundene Ergebnis steht mit dem hier bewiesenen in völligem Einklang. Da also die geodätischen Längen der Bogen benutzt werden, könnten Rechenschieber bzw. Rechenscheiben auch nach dieser Art konstruiert werden; dieselben hätten aber den Nachteil, nicht für kontinuierliche Multiplikation brauchbar zu sein.

[1]) S. 181 (Nr. 666).
[2]) Vergl. zu diesem Begriff: B. M. Konorski (1).
[3]) S. M. v. Laue (1), S. 70.

7. Mechanische Zeigerinstrumente für die ersten beiden kanonischen Formen. In seinem oft genannten Werke weist H. Schwerdt (1) (in § 27) auf die Wichtigkeit der Umsetzung von Tafeln in Zeigerinstrumente hin. Er faßt dabei hauptsächlich Doppelstrahlentafeln und ihre Verallgemeinerung ins Auge. Im folgenden möge auf ein vermutlich nicht neues derartiges Instrument deswegen hingewiesen werden, weil es auch eine Verallgemeinerung auf der Kugel besitzt.

Die Eigenschaft der Ellipse, konstante Leitstrahlensumme ($f_1 + f_2 = f_3 =$ konst.) zu besitzen[1]), kann zur Tafelkonstruktion für die erste kanonische Form herangezogen werden. Es stellt dann eine Tafel mit konfokalen Ellipsen und Hyperbeln ($f_2 < 0$), die nach f_3 beziffert sind, das Grundblatt für dieses Instrument dar, während auf den durch die Brennpunkte drehbaren Zeigern die f_1- und f_2-Skalen aufzutragen sind. Wie W. Jacobsthal in H. Weber-J. Wellstein (1) zeigt, besitzen die — durch Zentralprojektion auf die Einheitskugel entstehenden — sphärischen Ellipsen und Hyperbeln dieselbe Eigenschaft; es läßt sich also ein entsprechendes Kugelinstrument mit gekrümmten Zeigern konstruieren. — Das so entstehende Instrument stellt eine Vereinigung zweier »Polarnomogramme« dar[2]) und könnte daher als »Dipolarnomogramm« bezeichnet werden, um so mehr, als es ja die Darstellung der Ellipsen und Hyperbeln in Dipolarkoordinaten ist.

Ein entsprechendes, nur für die Ebene brauchbares Instrument ergäbe sich für die Form $f_1 f_2 = f_3$ mit Hilfe der Cassinischen Kurven, insbesondere Lemniskaten. Bei ihnen ist bekanntlich das Produkt der Dipolarkoordinaten konstant. Jedoch werde darauf nicht näher eingegangen.

8. Eine Anwendung der neueren elementaren Kreisgeometrie auf die Tafeln für die ersten beiden kanonischen Formen. Es sei ein orientierter Kreis (Zykel)[3]) vom Halbmesser r, sowie in der Entfernung p vom Mittelpunkte eine orientierte Gerade (ein Halbstrahl) gegeben[4]). Dann können für die Winkel α, β, die der Halbstrahl mit den von einem seiner Punkte (π) an den Zykel gehenden Tangenten einschließt, folgende Beziehungen hergeleitet werden (s. Abb. 5).

a) $$\frac{p}{x} = \sin\frac{\alpha + B}{2}, \qquad (B = \beta - 180^0), \qquad \frac{r}{x} = \sin\frac{B - \alpha}{2}.$$

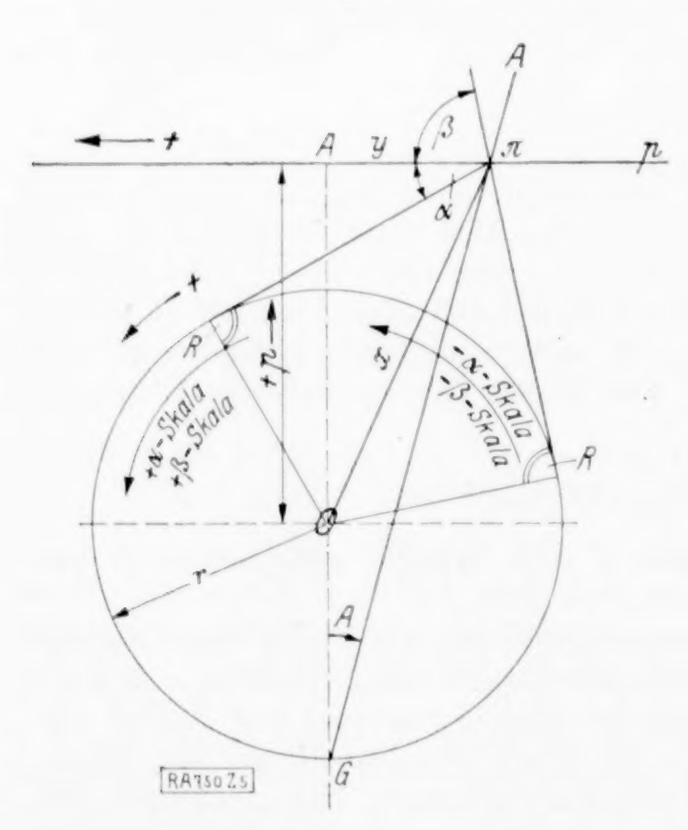


Abb. 5.

Division ergibt: $$\frac{p}{r} = \frac{\sin\frac{B+\alpha}{2}}{\sin\frac{B-\alpha}{2}}.$$ Nach leichten Umformungen folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r-p}{r+p} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}.$$

Das Produkt auf der rechten Seite bleibt also für alle Punkte eines Halbstrahls dasselbe und heißt nach P. Epstein[5]) die Potenz des Halbstrahls bezüglich des Zykels.

Setzt man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = f_1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = f_2, \qquad \frac{r-p}{r+p} = f_3,$$

so hat man eine Tafel für die zweite kanonische Form; hierbei ist es zweckmäßig, r fest und p variieren zu lassen, wodurch eine Schar paralleler Geraden definiert ist. Es besteht daher die Tafel aus dem nach f_1, f_2 bezifferten Kreis und der Parallelenschar f_3.

[1]) f_1 und f_2 sind die dipolaren Koordinaten des Ellipsenpunktes. Vergl. J. A. Serret-G. Scheffers (1).

[2]) S. M. d'Ocagne (1), S. 115.

[3]) S. E. Pascal-H. E. Timerding (1a), S. 43 ff.

[4]) p wird positiv gerechnet, wenn der Halbstrahl eine positive Umkreisung des Mittelpunktes festlegt.

[5]) S. a. a. O. S. 44; die bezügliche Arbeit von P. Epstein in der Z. f. mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 37 (1906), S. 499 war mir leider nicht zugänglich.

b) Verbindet man den Punkt π mit dem Gegenpunkt G auf dem Kreis, so ergibt sich folgende weitere Beziehung zwischen den Winkeln α, β und dem Winkel A dieses Strahls mit der p-Richtung. Es ist (s. Abb. 5)

$$\frac{y}{p+r} = \operatorname{tg} A\,, \qquad (y = A\,\pi)\,, \qquad \frac{p}{y} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+B}{2}\,.$$

Nach leichten Umrechnungen ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + 2\operatorname{tg} A = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}.$$

Dies ist, wenn $2\operatorname{tg} A = f_3$ gesetzt wird, zur Darstellung der ersten kanonischen Form geeignet. Hier besteht die Tafel aus dem wie oben bezifferten Kreis und dem durch G gehenden nach f_3 bezifferten Strahlenbüschel.

Das im vorstehenden Hergeleitete stellt sich als eine Verallgemeinerung des von H. Schwerdt (1)[1]) bei der quadratischen Gleichung gewonnenen Ergebnisses dar.

Bei der letzteren bestehen bekanntlich zwischen den Wurzeln und Koeffizienten die Beziehungen (a) und (b), so daß die Vereinigung der beiden Geradensysteme zur Lösung der quadratischen Gleichung benutzt werden kann. H. Schwerdt nennt Kurven, an denen eine Gerade gleitet, Gleitkurven. Durch projektive Umformung der 1846 von L. Lalanne[2]) gegebenen Tafel mit parabolischer Gleitkurve erhält er diejenige mit kreisförmiger; er kommt durch Umkehrung von der Tafel für die quadratische Gleichung zur vereinigten Summen- und Produkttafel. — Wie sich zeigt, kommt jeder der Tafeln mit Kreis und einem Geradensystem gesonderte Bedeutung zu und die Vereinigung in der Tafel für die quadratische Gleichung ist gewissermaßen nur zufällig.

Es möge bei dieser Gelegenheit auf die Ausführungen von F. Klein (1)[3]) über die graphische Behandlung der Gleichungen mit zwei Parametern näher eingegangen werden. F. Klein beschränkt sich von vornherein auf lineares Auftreten der beiden Parameter, und zwar behandelt er bloß die — zur kanonischen Form IV_0 gehörigen — quadratischen und kubischen Gleichungen. Die geometrische Deutung kann nach ihm auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen: Die erste deckt sich im wesentlichen mit dem bereits in »I« bei dieser Form gebrachten; die hier mit der Bezeichnung »Lösende Kurve« belegte Kurve heißt bei F. Klein (Ordnungs-) Normkurve. (Er legt übrigens die beim logarithmischen System anzuwendende Normalform der Geraden seinen Ausführungen zugrunde, was aber unwesentlich ist.) — Die zweite Deutung führt durch Anwendung der Dualitätsbeziehung zu dem oben Behandelten; die von H. Schwerdt Gleitkurve genannte Kurve wird von F. Klein ebenfalls als Normkurve, und zwar deutlicher als Klassennormkurve bezeichnet. Unter dem Hinweise darauf, daß diese Lösungsmethode in den Göttinger Vorlesungen von C. Runge[4]) behandelt würde, bezeichnet F. Klein diese Methode als besonders zweckmäßig, wenn man einen anschaulichen Ueberblick über die Realität der Wurzeln gewinnen will. Wie leicht einzusehen, ist jedoch für die nomographische Lösung dieses Verfahren weniger brauchbar. Dies trifft bei den hier in Rede stehenden Tafeln aus folgendem Grunde noch mehr zu: Während nämlich bei der quadratischen Gleichung die Tangenten von dem durch zwei Werte bestimmten Punkt außerhalb an den Kreis gezogen werden, ist dies hier nicht mehr der Fall. Es muß hier in einem gegebenen Kreispunkt die Tangente an den Kreis gezogen werden, was umständlich und ungenau ist, so daß der Anwendungsbereich dieser, im Folgenden »Kreistangententafeln« genannten Tafeln in dieser Form nicht groß ist. Die Ausbildung als mechanisches Instrument, bei dem Tangente und Radius einen durch den Mittelpunkt drehbaren rechtwinklig geknickten Winkelhebel bilden (s. u. Abb. 18, 19), deren zwei vorhanden sein müssen, wäre als gewisse Abhilfe zu betrachten.

Die Auftragung der f_1-, f_2- und A- ($\equiv f_3$) Leitern erfolgt auf dem zum Halbstrahl parallelen Durchmesser (Peripheriewinkelsatz!).

Da die Tafeln bloß aus dem Kreis (r) und der Geradenschar bestehen, ist es naheliegend, auf sie die Transformation durch reziproke Radien (Inversion) in bezug auf einen konzentrischen Kreis (ϱ) anzuwenden. Bei dieser geht dann der Kreis (r) in einen konzentrischen (r_1)[$r_1 = \varrho^2/r$] über, während die Geraden in Kreise durch den Mittelpunkt

[1]) § 28, S. 128.
[2]) S. z. B. M. d'Ocagne (1), S. 46.
[3]) S. 206.
[4]) S. C. Runge (1), S. 51.

übergehen. Aus den Tangenten an (r) werden den Kreis (r_1) von innen berührende Kreise durch seinen Mittelpunkt, also mit dem Halbmesser $r_1/2$, durch deren Schnitt die gesuchte Lösung f_3 hindurchgeht. Es ist daher bloß die Einzeichnung des Kreises vom Halbmesser $r_1/2$ erforderlich, der die — dem Kreise r entsprechende, zentrisch ähnlich gelegene — Bezifferung für die Leitern f_1 und f_2 trägt. Als Ablesegerät dient der Zirkel mit konstanter Oeffnung[1] $r_1/2$, der in f_1 und f_2 einzusetzen ist, wodurch im Schnittpunkte dieser Kreise f_3 bestimmt ist. Die Tafeln dieser Form sind dann wieder gut und für alle Fälle brauchbar.

II. Einige Anwendungen.

9. Beziehungen zwischen drei Veränderlichen. a) Kanonische Formen.

Kanonische Form $f_1 + f_2 = f_3$. Als Beispiel für die beiden Abbildungen diene die Additionstafel $A + B = C$. In Abb. 6a ist die Abb. von H. Poincaré dargestellt; für $\mu_2 > 0$ ist die Tafel für negative f_3 nicht brauchbar, da der Bezifferungskreis gemäß (III) imaginär wird. Es zeigen sich also die bereits erwähnten Einschränkungen. — In Abb. 6b ist die Abb. von E. Beltrami wiedergegeben; es ist der Fall $A = 3$, $B = 0$ eingezeichnet. — In Abb. 6c ist schließlich die Gleichung $1/a + 1/b = 1/c$ als Tafel mit Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät wiedergegeben; es ist die Annahme $a = 2$, $b = 3$ eingezeichnet.

Kanonische Form $f_1 f_2 + f_3 = 0$. Für alle drei Tafelgattungen ist die Multiplikationstafel $AB = C$ gewählt. In Abb. 7a, b ist die Abb. von H. Poincaré für die beiden Transformationsmöglichkeiten wiedergegeben; daselbst ist $A = 1$, $B = 1$ eingezeichnet. — Abb. 8a gibt die Abb. von E. Beltrami wieder; daselbst ist $A = 1$, $B = -2$. — In Abb. 8b ist von der Form $\frac{1}{AB} = \frac{1}{C}$ ausgegangen worden; es ist das Beispiel $A = 2$, $B = 0{,}5$ gewählt worden.

Kanonische Form $f_1 + f_2 + f_3 g_1 = 0$. 1. Quadratische Gleichung $z^2 + az - b = 0$.

α) Abb. von H. Poincaré: Hierfür findet sich in der Literatur[2]) eine Tafel mit der einschränkenden Voraussetzung $b > 0$. Gemäß dem oben Gesagten ist die Einschänkung hier nicht nötig (s. »Ablesekreis b« in Abb. 9a, b). Abb. 9a gibt die für $\mu_1 = \mu_2 = 1$ entstehende bekannte Tafel für die Gleichungen

$$z^2 + 3z - 4 = 0\,, \qquad (\text{Ablesekreis a, } z_{1,2} = 1,\ -4)\,,$$
$$z^2 - 5z + 4 = 0\,, \qquad (\text{Ablesekreis b, } z_{1,2} = 1,\ 4)\,.$$

Abb. 9b für diese Gleichungen mit $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ wieder. Beim Ablesekreis b gelangt die im vorstehenden für negative b angegebene Konstruktion zur Anwendung[3]).

β) Abb. von E. Beltrami: Die Abb. 10 zeigt das Beispiel $z^2 + {}^1/_2 z - {}^1/_2 = 0$ $(z_{1,2} = {}^1/_2, -1)$. Beim Entwurfe wurde $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $z = \frac{1+y}{x}$ gewählt.

γ) Abb. 11 zeigt die Tafel mit Rechtwinkelkreuz für die Gleichung $z^2 + z - 2 = 0$ $(z_{1,2} = 1, -2)$

δ) Abb. 12a zeigt die konstruktive Lösung von $z^2 - z - 2 = 0$ mit Hilfe des Ablesselotes, Abb. 12b mit Hilfe der Chordale als Ableselinie. Es ergibt sich $z_{1,2} = 2, -1$. Man kommt zu diesen Konstruktionen wie folgt: Schreibt man die Gleichung eines Kreises $K(\alpha, \beta, r)$ in der Form

$$S \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + C = 0\,, \qquad C \equiv \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

und betrachtet zwei Kreise $K(\alpha, \beta, r)$ und $K'(\alpha', \beta', r')$, von denen der eine der Ablesegeraden, der andere der Lösenden Kurve zugeordnet wird, so ergibt sich die erste Konstruktion aus der Bedingung, daß sich die Kreise unter dem Winkel ϑ schneiden sollen

$$2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - (C + C') \pm 2rr'\cos\vartheta = 0\,,$$

wenn $C = C' \equiv 0$, $rr'\cos\vartheta \equiv 1$ gewählt wird (Abb. 3a).

[1]) Nach Th. Vahlen (1) sind derartige Konstruktionen bereits lange vor denen von L. Mascheroni und J. Steiner ausgeführt worden, deren Vorläufer sie sind.

[2]) S. z. B. M. d'Ocagne (1), S. 390, R. Soreau (1b), S. 172, vergl. auch P. Luckey (4), S. 52 (elementare Herleitung), auch bei R. Soreau (1b) eine solche.

[3]) Gemäß den bekannten, bereits oben erwähnten Koeffizienteneigenschaften der quadratischen Gleichung ergeben sich die im folgenden explizit hergeleiteten Tafeln für die beiden ersten kanonischen Formen auch aus der Tafel für diese Gleichung.

Abb. 6 a.

Abb. 6 b.

Abb. 6 c.

Abb. 7 a.

Abb. 7 b.

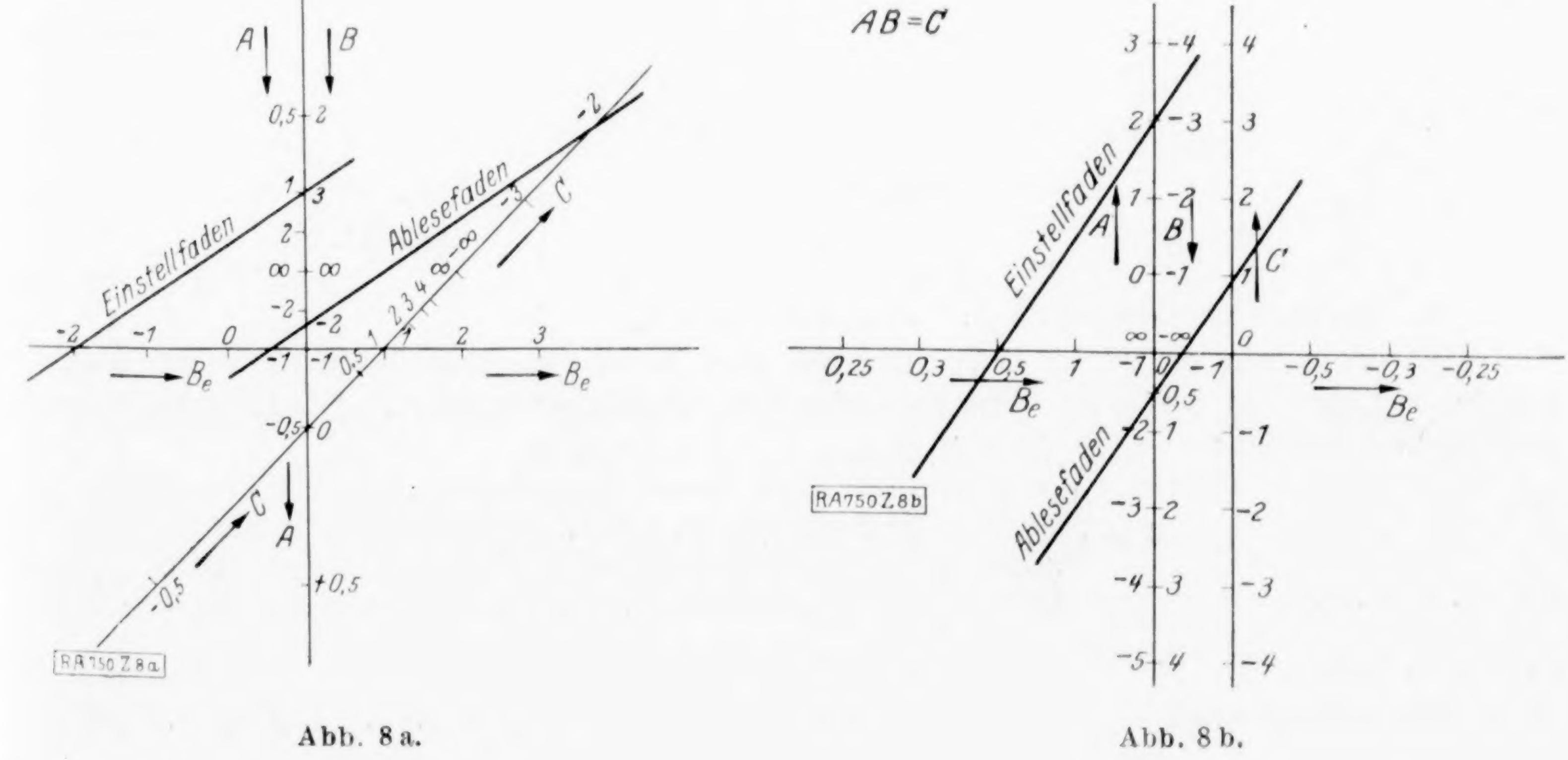


Abb. 8 a.

Abb. 8 b.

Diese zweite Konstruktion entsteht gemäß $S = S'$, wenn $\alpha = \beta \equiv 0$, $C \equiv -2$, $C' \equiv 0$ gewählt wird (Abb. 3b). Vergl. hierzu insbesondere F. Klein (2), § 9. Da diese konstruktiven Lösungen keine praktische Bedeutung haben, so wurde von der Ausarbeitung weiterer Beispiele abgesehen.

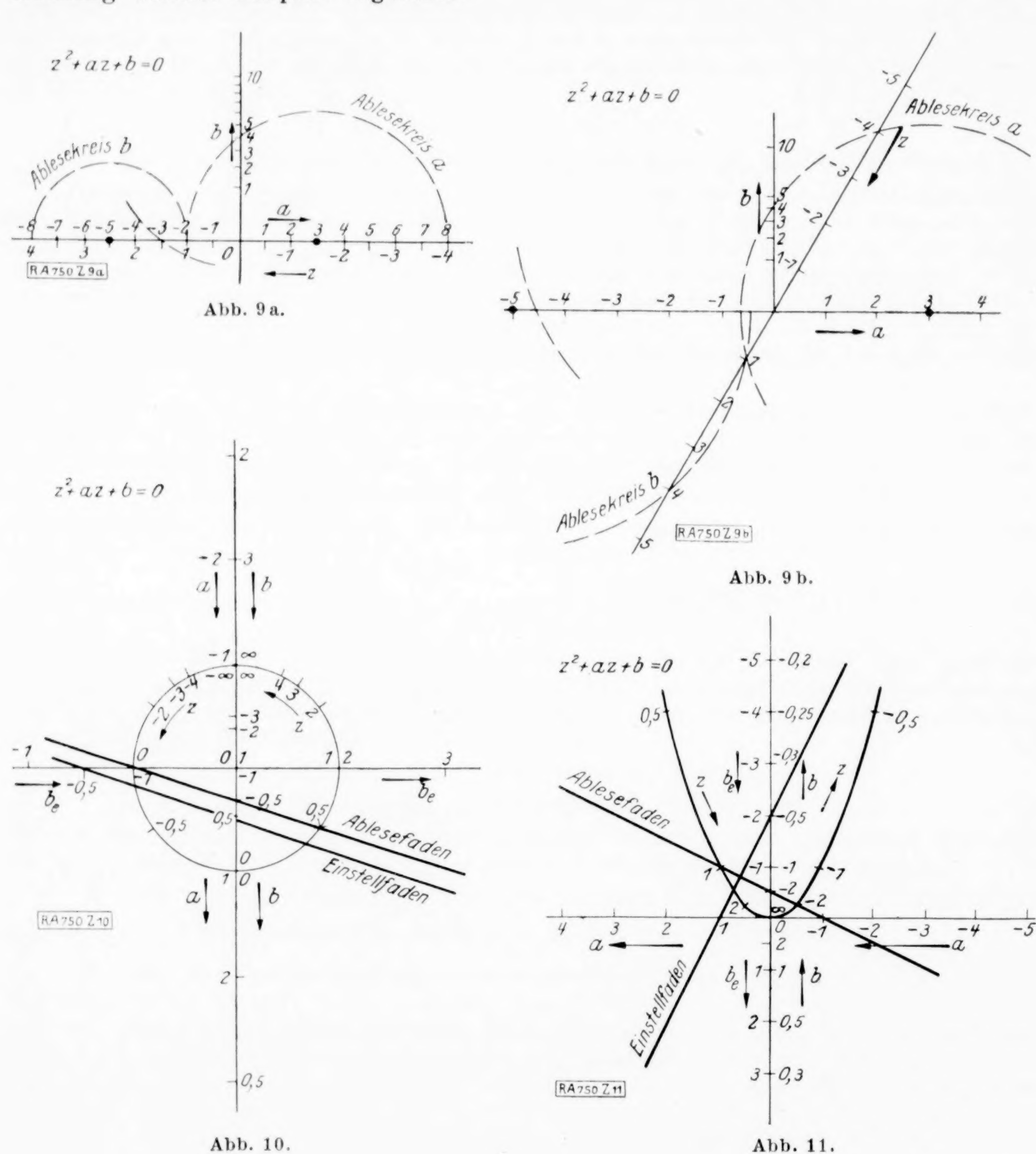


Abb. 9 a.

Abb. 9 b.

Abb. 10.

Abb. 11.

2. Kubische Gleichung: $z^3 + a z + b = 0$.

α) Abb. von H. Poincaré: Hierfür gibt P. Luckey (3) die in Abb. 13 wiedergegebene Tafel; sie soll nach dem Vorstehenden hergeleitet werden. Die Gleichung kann geschrieben werden:

$$z^3 + {}^1/_4\, z + (a - {}^1/_4)\, z + b = 0 \,.$$

Mit
$$\frac{1}{z^2 + {}^1/_4} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{1}{z\,(z^2 + {}^1/_4)} = \mp \frac{1}{x^2 + y^2}$$
ergibt sich

als Gl. d. A.K. $$-\left(a - \frac{1}{4}\right) \frac{x}{x^2 + y^2} - (\mp b) \frac{1}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$y^2 = x\,(x - {}^1/_2)^2 \quad \text{(II)},$$

deren Bez. erfolgt nach $$x = \mp z \quad \text{(III)}.$$

Die Tafel enthält die a-Leiter, die Quadratwurzelleiter von $|b|$ und die $|z|$-Leiter; sie liefert immer diejenige Wurzel z der Gleichung, deren Vorzeichen demjenigen von b entgegengesetzt ist. Die Erklärung dieses — von P. Luckey (3) bemerkten — Verhaltens ist folgende: Das Quadrat des Halbmessers des Ablesekreises ist:

$$R^2 = \pm\, b + \left(\frac{p - 1/4}{2}\right)^2.$$

Bei $b < 0$ wäre dieser Ausdruck unmittelbar nicht zu verwenden; durch das untere Vorzeichen ist dies aber der Fall. Zu dem durch das untere Vorzeichen positiv gewordenen, ursprünglich negativen b gehört aber gemäß (III) ein positives z und umgekehrt. — In Abb. 13 sind die Gleichungen

$z^3 - 6z + 40 = 0 \quad (z_1 = -4)$

und

$z^3 - 6z - 40 = 0 \quad (z_1 = +4)$

behandelt.

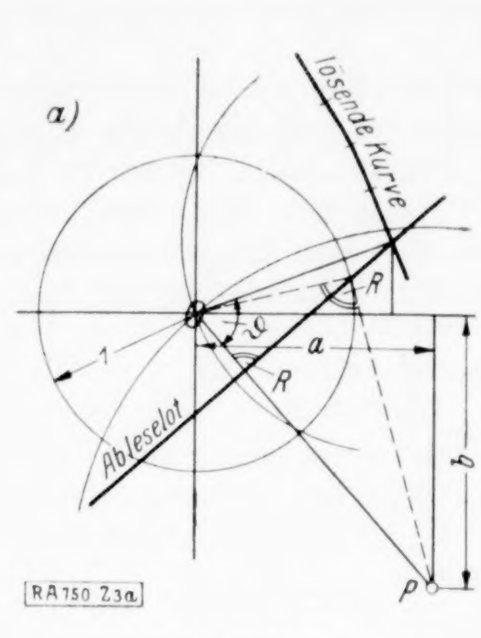


Abb. 3a.

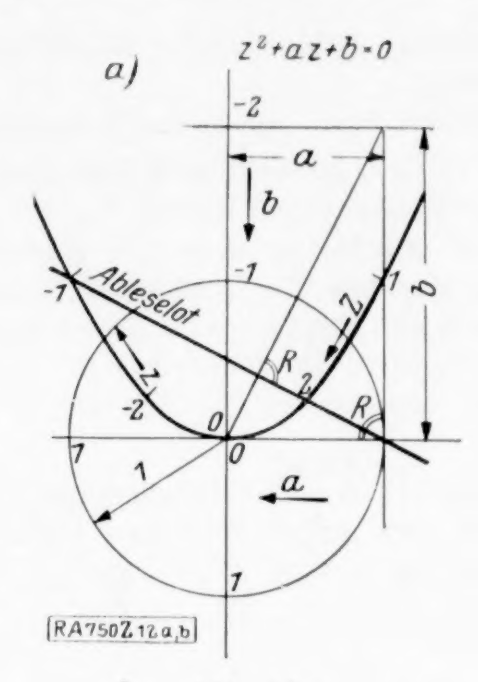


Abb. 12a.

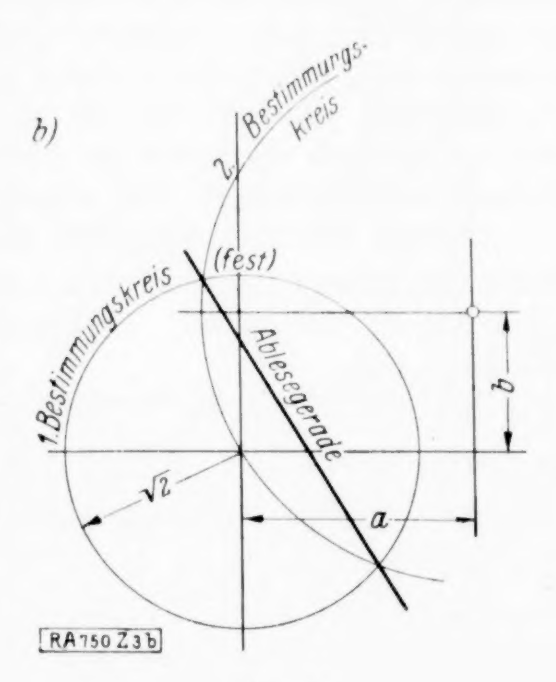


Abb. 3b.

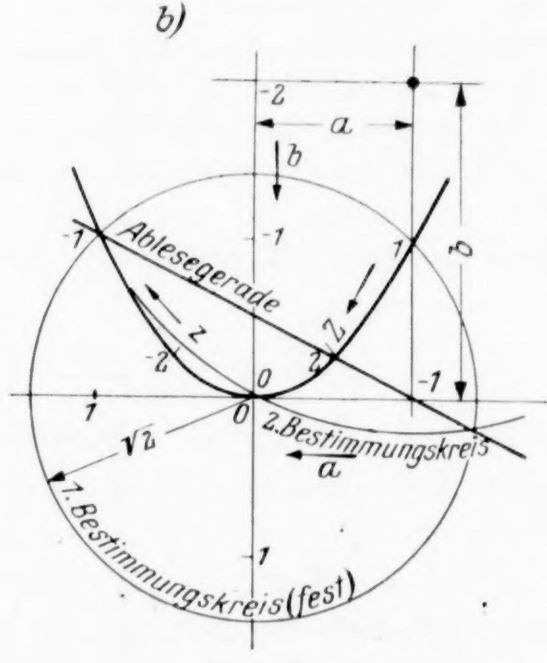


Abb. 12b.

3. **Vollständige kubische Gleichung** $z^3 + p z^2 + q z + l = 0$. Obwohl nicht ganz hierhergehörig, soll diese Gleichung in eine Tafel mit Parallelenindex umgesetzt werden. Setzt man $z = p\,t$, so erhält man

$$t^3 + t^2 + q\,t/p^2 + l/p^3 = 0.$$

Dies durch $t^3 + t^2$ dividiert, gibt

$$1 + \frac{q}{p^2}\,\frac{1}{t\,(t+1)} + \frac{l}{p^3}\,\frac{1}{t^2\,(t+1)} = 0\,.$$

Setzt man $\dfrac{1}{t\,(t+1)} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{t^2\,(t+1)} = \dfrac{x}{y}$, so erhält man

als Gl. d. A.F. $\quad -y = \dfrac{l}{p^3}\,x + \dfrac{q}{p^2}$ . . . . . (I),

als Gl. d. L.K. $\quad x^2 = y\,(1 + x)$ . . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $\quad t \equiv \dfrac{z}{p} = \dfrac{1}{x}$ . . . . . (III).

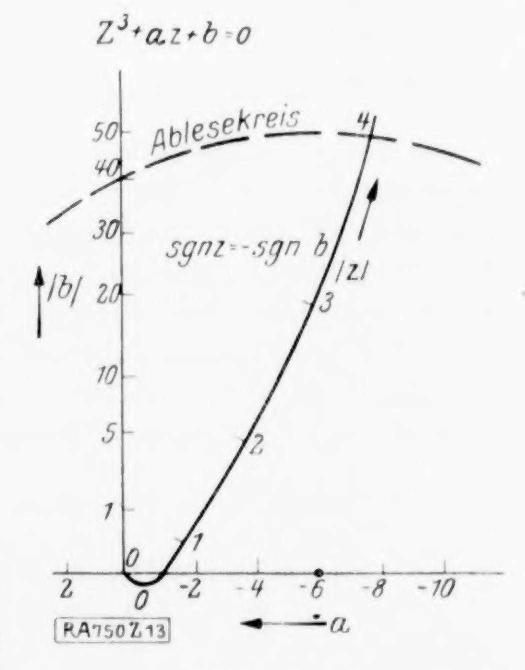


Abb. 13.

Es ist also stets der Ausdruck q/p^2 durch Nebenrechnung zu bilden. — Die diesem Beispiel zugrunde gelegte Lösungsform ist von B. M. Konorski (1)[1]) und von ihm auf verschiedenem Wege hergeleitet worden. Da er die Gleichung in der Form

$$z^3 + p\,z^2 + q\,(z + p) + l - p\,q = 0$$

[1]) S. 69.

schreibt, ist überdies auch noch der **Ausdruck** $(l - p\,q)$ **durch eine Nebenrechnung zu bilden.**

IV. Kanonische Form $f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\, g_3 + h_3 = 0$.

a) Abb. v. H. Poincaré: Als Beispiel diene die Multiplikationstafel $A\,B = C$, die aus dieser Form mit $f_3 \equiv 1$, $g_3 \equiv 0$ hervorgeht. Abb. 14 zeigt in a) die Wahl $\mu_1 = 2$, in b) die Wahl $\mu_1 = 1$. Wie leicht ersichtlich, stellt diese Tafel die nomographische Umsetzung des Kreissekantensatzes aus der elementaren Kreisgeometrie dar. (In Abb. 14 ist der Fall $A = 1$, $B = 4$ gewählt). — Zur Bestimmung des Kreismittelpunktes, der stets auf

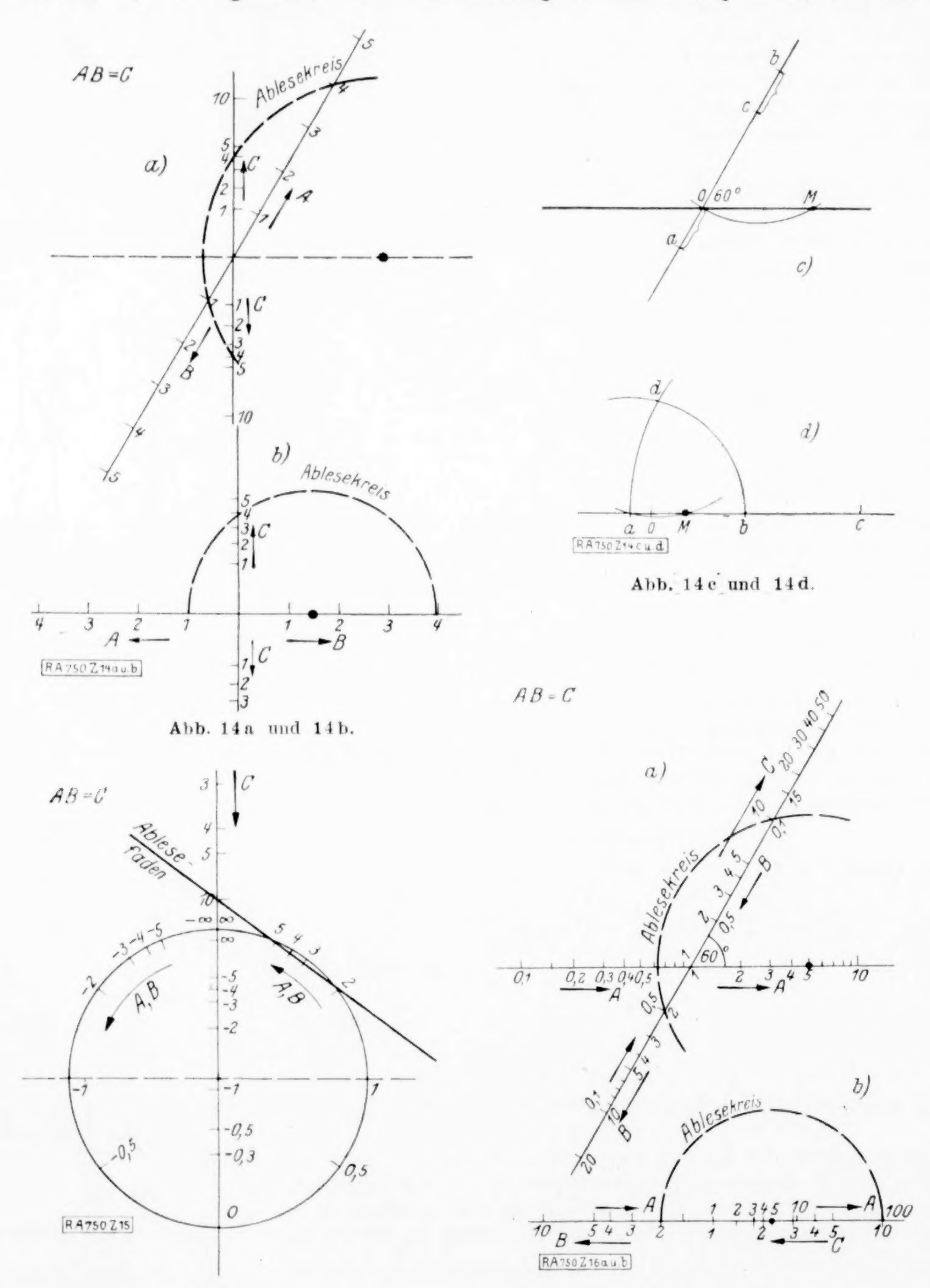


Abb. 14a und 14b.

Abb. 14c und 14d.

Abb. 15.

Abb. 16a und 16b.

der X-Achse liegt, können die schon erwähnten Konstruktionen von L. Mascheroni herangezogen werden.

Im Fall a) ist, da der Winkel, unter dem die AB-Achse geneigt ist, 60^0 beträgt, nach Abb. 14c vorzugehen: Von b ist die Strecke oa gegen 0 hin abzutragen (Punkt c); der Kreis aus c mit oc als Halbmesser gibt bereits auf der Wagerechten den Mittelpunkt M. — Im Fall b) vereinfacht sich die ursprüngliche L. Mascheronische Konstruktion, da die Gerade ab gezeichnet vorliegt. Es ist (Abb. 14d) aus b der Kreis mit $ab = r$ als Halbmesser nach c zu schlagen, von dort mit $2r$ als Halbmesser ein Kreis zu schlagen, der mit dem aus a mit r beschriebenen Kreis zum Schnitt zu bringen ist (Punkt d); der Kreis aus d mit ad als Halbmesser gibt bereits M. (Der Beweis folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke acd und aMd.)

β) Abb. v. E. Beltrami: Auch hier werde die Multiplikationstafel $AB = C$ dargestellt. Es ergibt sich ein Kreisnomogramm, das aber, wie leicht nachzurechnen, von dem bereits bekannten nach R. Soreau verschieden ist. In Abb. 15 ist $A = 2$, $B = 5$ gewählt.

V. Kanonische Form $\dfrac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = f_3$.

α) Abb. v. H. Poincaré: Es ist gemäß dem Vorstehenden die Multiplikationstafel $AB = C$ in der logarithmierten Form als Beispiel gewählt, und zwar ist in Abb. 16a $\mu_1 = 2$, in Abb. 16b $\mu_1 = 1$ gewählt worden. Die Abbildung zeigt die Wahl $A = 5$, $B = 2$. Es werde noch erwähnt, daß diese Tafel auch ohne weiteres durch Umkehrung der Reihenfolge der Zirkeleinstellungen für die Division geeignet ist. Abb. 16a kann ferner in leicht ersichtlicher Weise — durch Anbringung der völlig analog wie die beiden anderen geteilten dritten Hauptdiagonale des regelmäßigen Sechsecks — zur kontinuierlichen Multiplikation und Division geeignet gemacht werden.

β) Abb. v. E. Beltrami: Hierfür werde das bereits in »II« behandelte Beispiel von H. Schwerdt (1) wiedergewählt. Es ist für $C = A + B$

$$-\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B}.$$

Es ergibt sich ebenso wie bei H. Schwerdt eine gleichseitige Hyperbel. Vermöge $C + \frac{\pi}{2} = A + \frac{\pi}{4} + B + \frac{\pi}{4}$ ist dieselbe verziffert. In Abb. 17 ist $A = 45$, $B = 90 : C = 135$.

Zwei Kreistangententafeln. In Abb. 18a ist die Tafel $A + B = C$ wiedergegeben. Sie findet sich in Abb. 71 des Buches von H. Schwerdt (1) als Teil der Tafel für die quadratische Gleichung. In Abb. 18a ist $A = 0{,}5$, $B = 1{,}5 : C = 2$. $(r = 1 = \varrho = r')$.

Abb. 19a gibt eine Tafel für die in der Physik vorkommende Gleichung[1] $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = \sin\alpha_3$; wie leicht einzusehen, sind die komplementären Werte von α_1 und α_2 bezüglich der Geraden $\alpha_3 = 90^0$ symmetrisch. Bei der Konstruktion wurde $r = 1$ gewählt, die α_3-Parallelen liegen auf der $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_3}{2}\right)$-Leiter. In der Abb. ist der Fall $\alpha_1 = 15$, $\alpha_2 = 30^0$ eingetragen. Die Tafel ergibt $\alpha_3 = 9^0$, während die Rechnung den Wert $8^0\,54'$ liefert. $(\varrho = r' = 1.)$

In den Abb. 18b und 19b sind die diesen entsprechenden Tafeln wiedergegeben; daselbst sind auch die gleichen Beispiele eingezeichnet. Selbstverständlich könnte die genannte Abbildung des Schwerdtschen Buches für die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ in gleicher Art umgeformt werden; als Ablesegerät ergäbe sich hier der Kreis mit dem festen Radius $r_1/2$, dessen Mittelpunkt durch den Schnittpunkt der a-, b-Kreise jeweils festgelegt ist. Auch bei den vorliegenden Tafeln könnte dieser Kreis in leicht ersichtlicher Weise durch die gegebenen f_1- und f_2-Werte festgelegt werden; sein Mittelpunkt gäbe dann den f_3-Wert.

b) Allgemeine Gleichungsformen.

Als erstes Beispiel soll für alle drei Tafelformen die in »II« wiederholt behandelte Formel für die Böschungsmauern abermals gewählt werden.

α) Abb. v. H. Poincaré: Hier werde von der Form

$$K^2 + Kp\sin\varphi\cos\varphi - \frac{p}{3}\cos^2\varphi = 0$$

ausgegangen. Mit $K = \frac{u}{v}$ ergibt sich

---

[1]) S. M. d'Ocagne (1), S. 213.

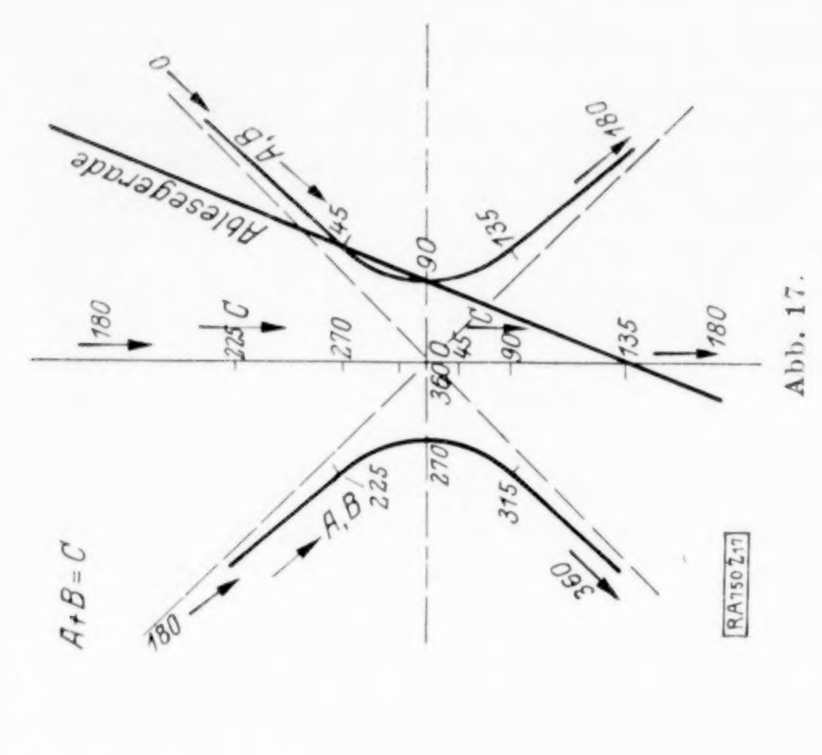


Abb. 17.

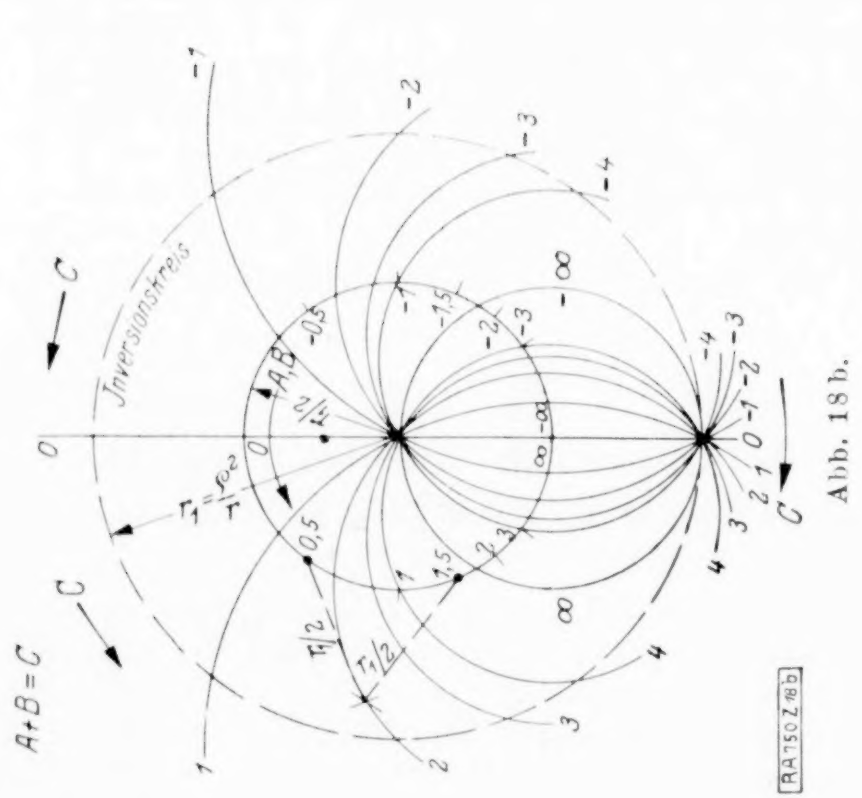


Abb. 18 b.

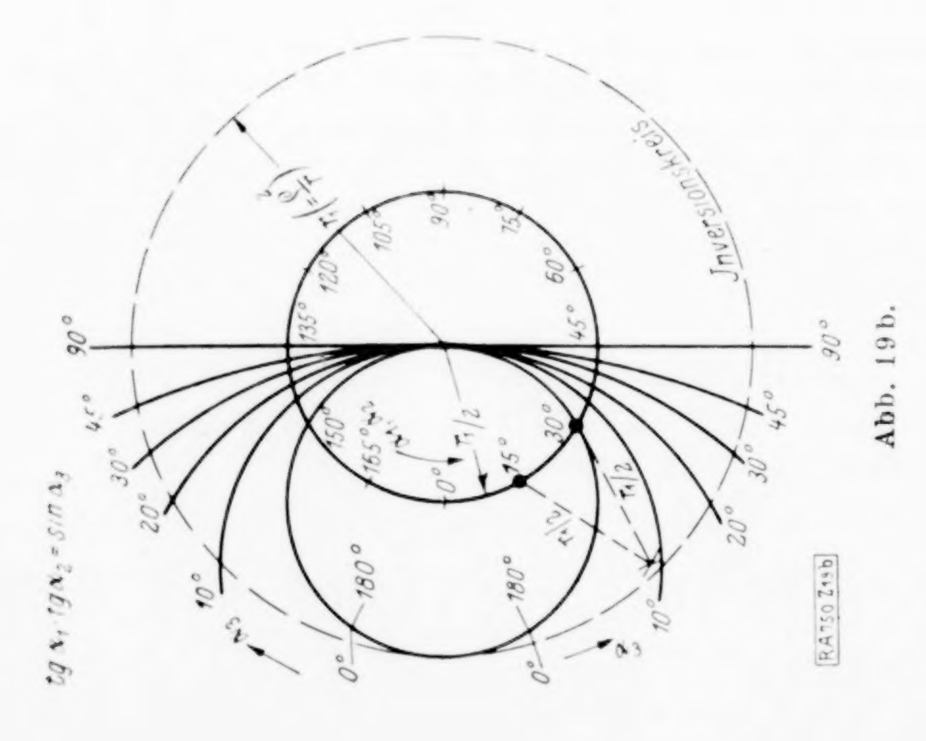


Abb. 19 b.

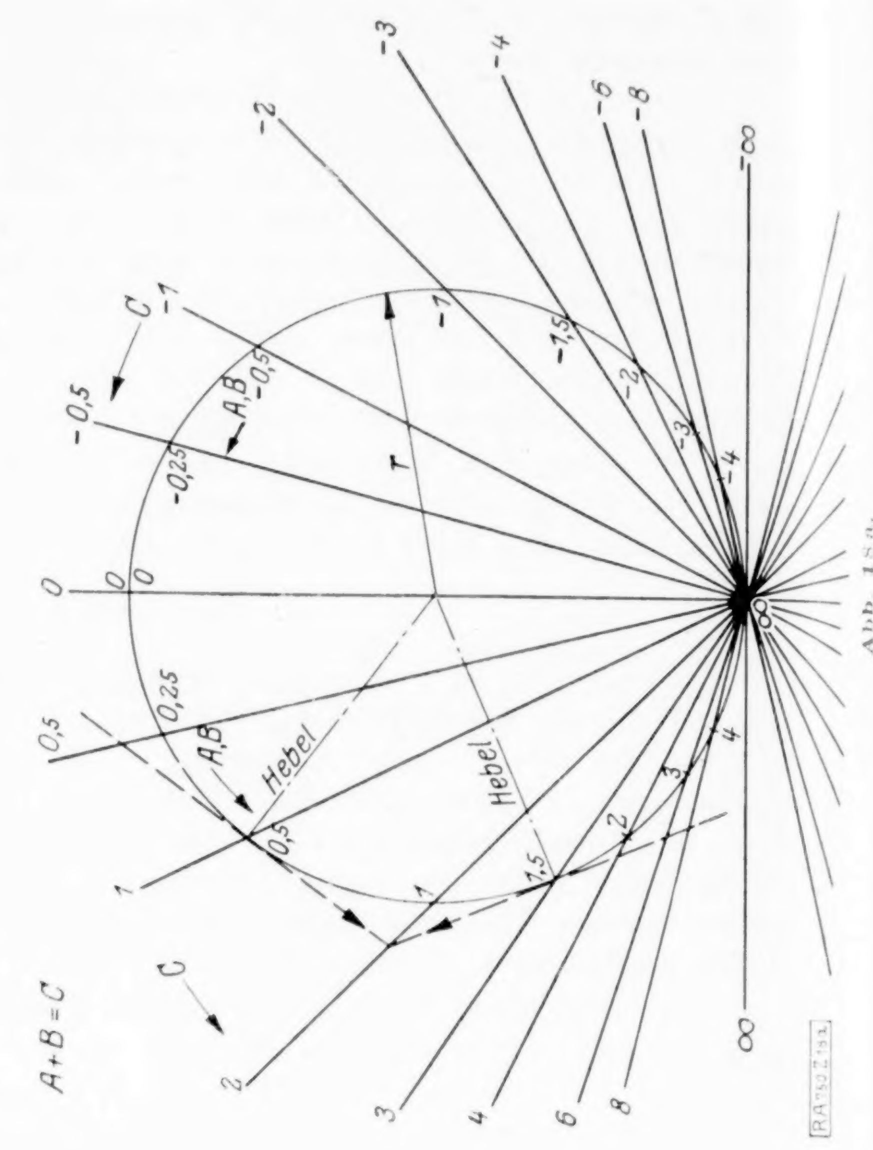


Abb. 18 a.

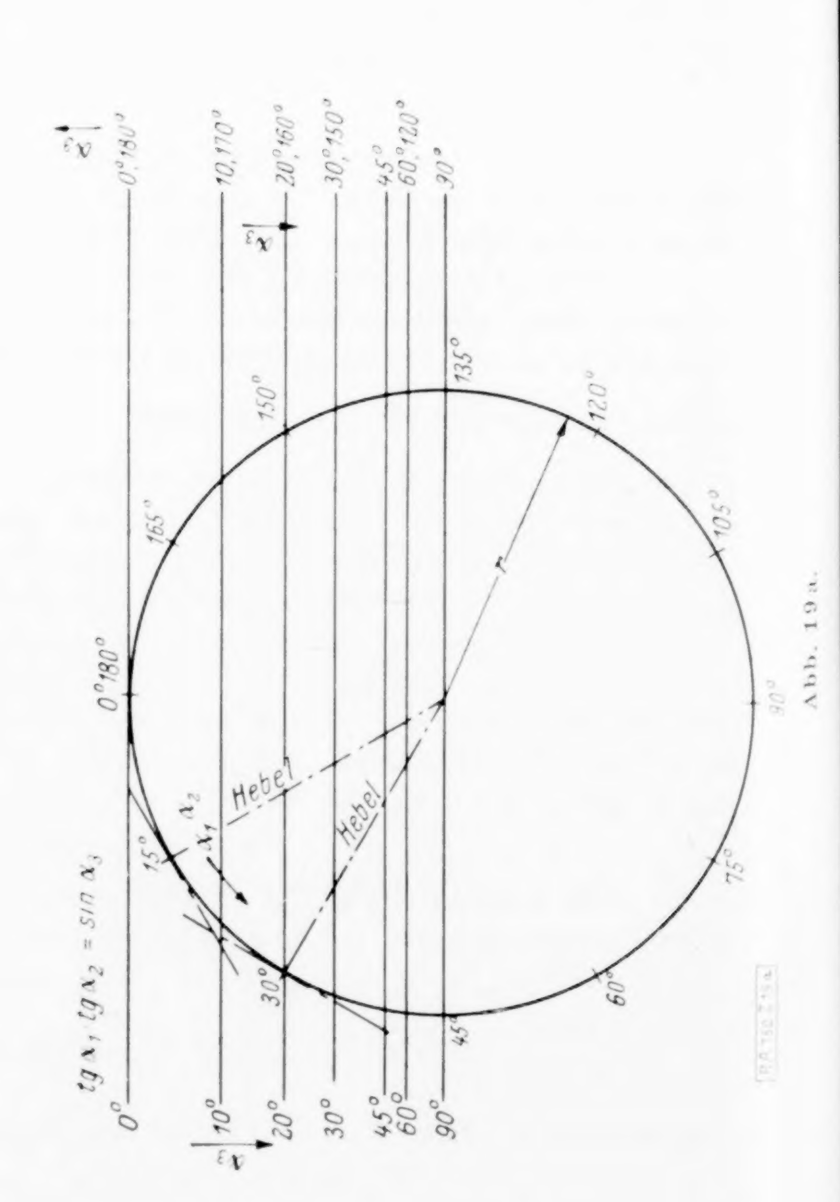


Abb. 19 a.

als Gl. d. A.K. $\quad - \cos\varphi \sin\varphi \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\cos^2\varphi}{3} \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \quad \ldots \quad$ (I),

als Gl. d. L.K. $\quad y = \pm x \sqrt{\frac{1}{p} - 1} \quad \ldots \quad$ (II),

deren Bez. erfolgt nach $\quad x = K \quad \ldots \quad$ (III).

Die Abb. 20a zeigt den für diese Gleichung entworfenen eindimensionalen Rechenschieber. Das eingezeichnete Beispiel gibt den Fall $\varphi = 30^0$, $p = 0{,}5$, $K = 0{,}26$ wieder.

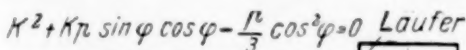
β) **Abb. v. E. Beltrami: Hier ergibt sich**

als Gl. d. A.F. $\quad - \cos\varphi \sin\varphi \frac{x}{1+y} + \frac{\cos^2\varphi}{3} \frac{1-y}{1+y} = 1 \quad \ldots \quad$ (I),

als Gl. d. L.K. $\quad \left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right)^2 + y^2 = 1 \quad \ldots \quad$ (II),

deren Bez. erfolgt nach $\quad y = x/K + 1 \quad \ldots \quad$ (III).

(S. Abb. 20b).



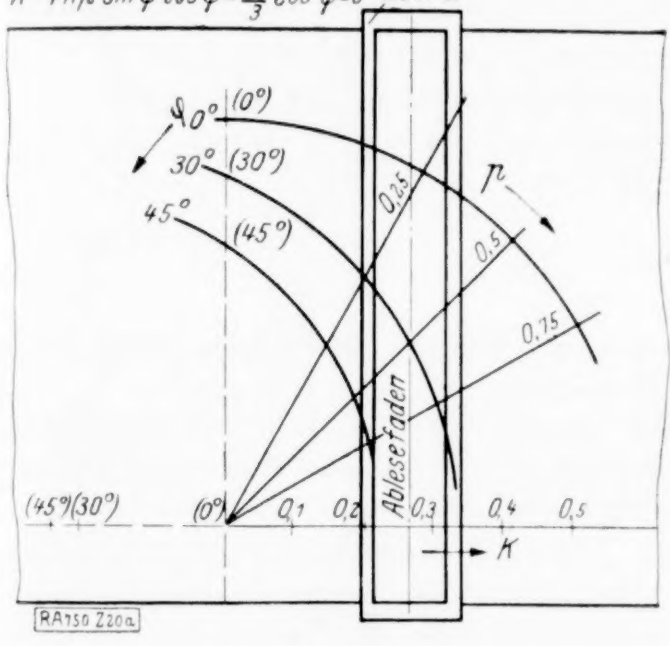


Abb. 20a.

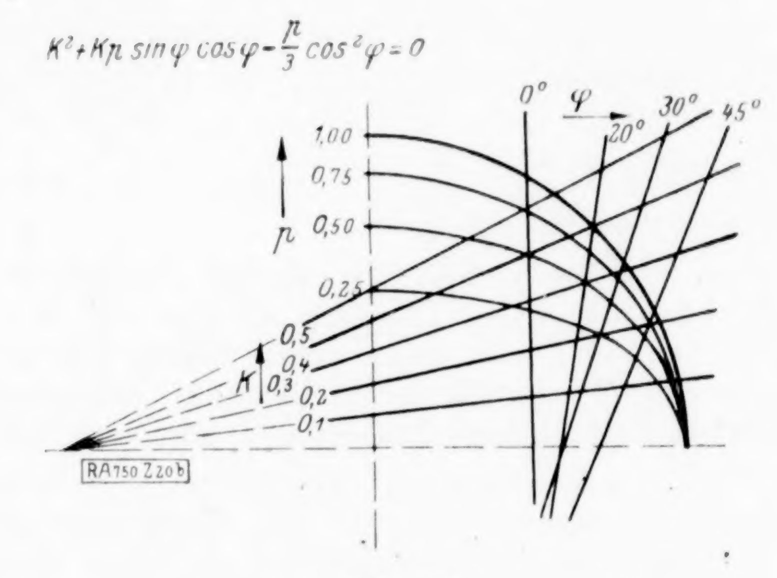


Abb. 20b.

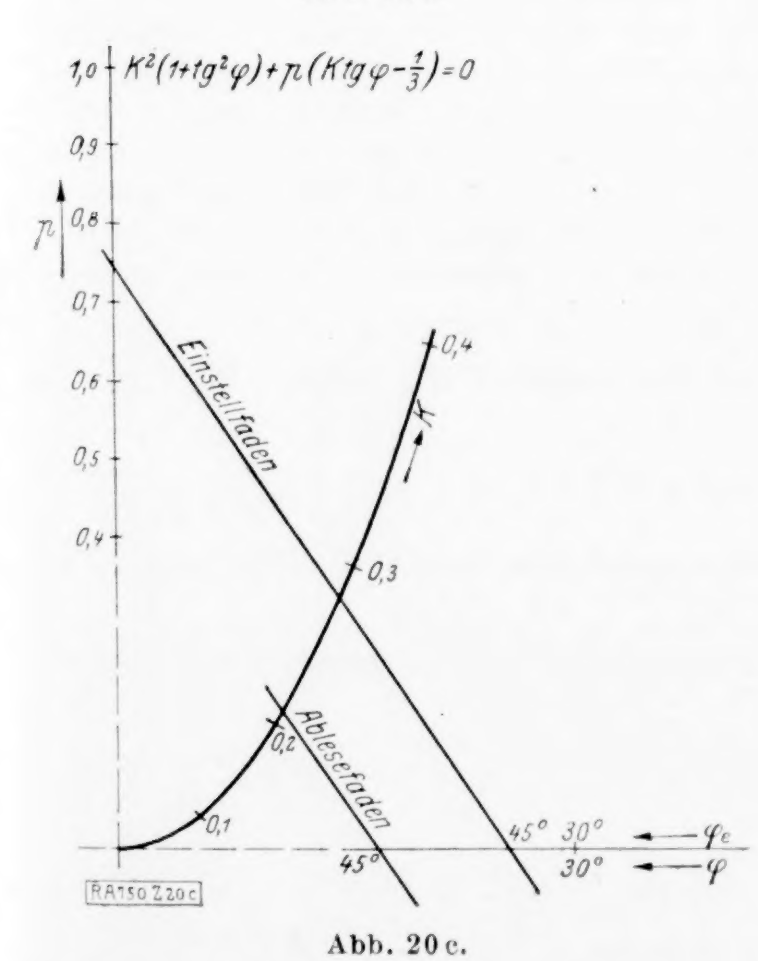


Abb. 20c.

Abb. 20d.

behandeln lassen, ergeben sich die, für die Form 4) $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \frac{f_3+f_4}{g_3+g_4}$ von ihm gewählten Beispiele auf ganz einfache Weise; sie sollen daher sämtlich wiedergegeben werden.

1. Das **erste** Beispiel betrifft die **Bazinsche** Formel. Es ergibt sich nach leichter Rechnung (s. »II«)

als Gl. d. A.F. $$y = \frac{87\sqrt{J}}{U}\,x + \gamma \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$y^2 = x \quad \text{(II)},$$

deren Bez. erfolgt nach $$y = \frac{x}{\sqrt{R}} \quad \text{(III)}.$$

(S. Abb. 24). Das System U, J wurde parallel zu sich seitlich verschoben, was ja erlaubt ist. Die Abb. zeigt den Fall $\gamma = 1, 3$, $R = 4$, $J = 0{,}004$, $U = 6{,}6$.

2. Als **zweites** Beispiel diene die in »II« ebenfalls bereits behandelte alte Eichungsformel der Union des Yachts français:

$$130\,\frac{T}{\sqrt{S}} = L\,p - \frac{p^2}{4} \quad \text{(s. »II«)}.$$

Wird gesetzt: $p = -1/x$, $p^2/4 = y/x$, so erhält man

als Gl. d. A.F. $$130\,\frac{T}{\sqrt{S}}\,x = -L - y \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$y\,x = {}^1/_4 \quad \text{(II)}.$$

deren Bez. erfolgt nach $$x = -1/p \quad \text{(III)}.$$

(S. abaque 74, S. 340).

3. Das **dritte** Beispiel betrifft die Auflösung der Dreiecke, wenn drei Elemente bekannt sind, von denen eines ein Winkel ist. Hierfür gibt R. **Soreau** (1a) nebst der Fluchtlinientafel die Netztafel von J. **Lallemand** in abaque 57 wieder. Sind α_1, α_2, α_3 die Winkel, γ_1, γ_2, γ_3 die entgegengesetzten Seiten, so gilt für $\gamma_2 > \gamma_3$ die Beziehung:

$$\frac{\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_2+\gamma_3} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1/2}{\operatorname{tg}[\pi-(\alpha_2+\alpha_1/2)]}, \quad (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi).$$

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha_1/2 = t_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = T_2$, so schreibt sich die Gleichung in der Form

$$\frac{\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_2+\gamma_3} = \frac{t_1 - 1/T_2}{1/t_1 + 1/T_2}.$$

Durch Umformung ergibt sich $$-\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{t_1 + 1/t_1}{t_1 - 1/t_1 - 2/T_2}.$$

Mit $$t_1 + 1/t_1 = -x, \quad t_1 - 1/t_1 = y \quad \text{(III)},$$

ergibt sich als Gl. d. A.F. $$y = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\,x + \frac{2}{T_2} \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{(II)},$$

deren Bez. nach einer der Gl. (III) erfolgt (abaque 73, S. 339).

4. Auch das **vierte** und letzte Beispiel R. **Soreaus**, das die Formel

$$W = \frac{3300\,T}{D}\left(5 - \frac{L+12}{T+60}\right)$$

behandelt, kann, wenn man sie in der Form

$$\frac{D}{3300/W} = \frac{5\,(57{,}6+L) - L}{1 + 60/T}$$

schreibt, leicht vertafelt werden. Es ergibt sich

als Gl. d. A.F. $$y = \frac{D}{3300/W}\,x + L \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. und ihrer Bez. $$\left\{\begin{array}{l} y = 5\,(57{,}6 + T) \\ x = 1 + 60/T \end{array}\right\} \quad \text{(II), (III)}$$

(abaque 74, S. 339).

c) Tafeln mit Doppelkotenpunkten.

Hier werde das bereits in »II« gegebene H. Schwerdtsche Beispiel, die Gleichung

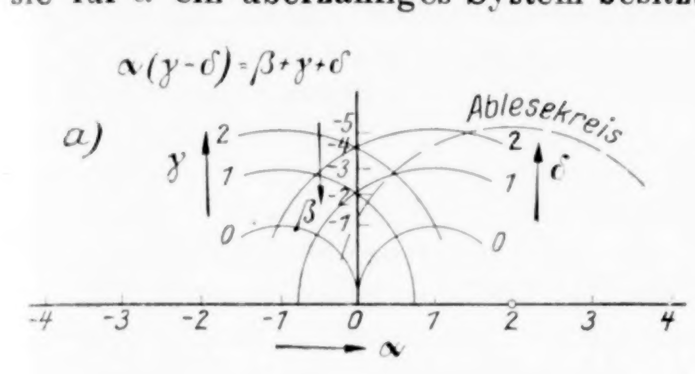
$$\alpha = \frac{\beta + \gamma + \delta}{\gamma - \delta}$$

wieder vertafelt.

α) Abb. v. H. Poincaré: Abb. 25a: $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 2:\ \delta = 1$
Abb. 25b: $\beta = 3,\ \gamma = 1{,}5,\ \delta = 1:\ \alpha = 3.$

Die erste Tafel ist nur bei gegebenem α zu gebrauchen, die letztere dient zur Berechnung von α bei gegebenen β, γ, δ.

β) Abb. v. E. Beltrami: Abb. 26 zeigt den Fall $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$. Auch diese Tafel kann nicht zur Berechnung von α verwendet werden, da sie für α ein überzähliges System besitzt.



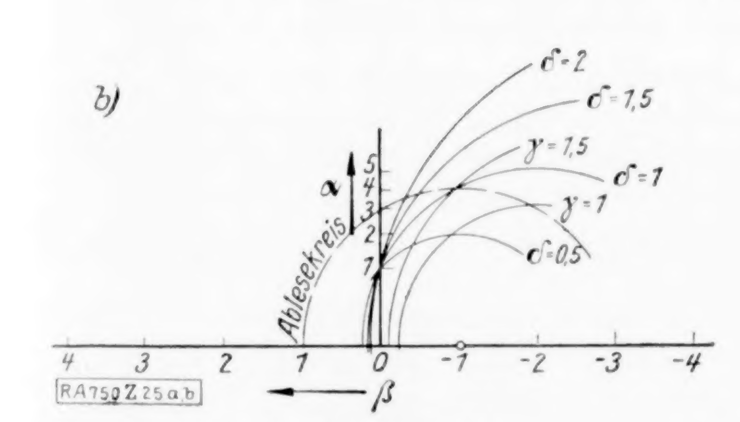


Abb. 25a und 25b.

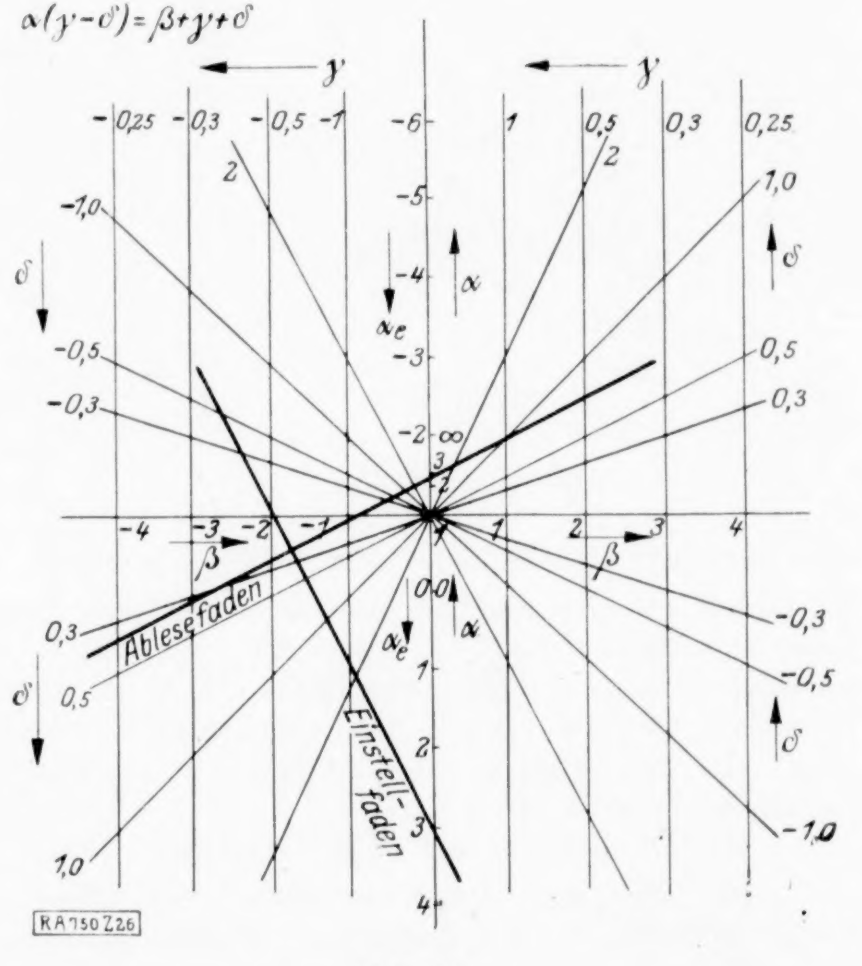


Abb. 26.

11. Einige Tafeln für Gleichungen von der Form $f_1 f_2 = f_3 + f_4$. In Band 4 (1924) dieser Zeitschrift gibt P. Werkmeister (1) einige Tafeln für Gleichungen dieser Form. Die in vorliegender Arbeit gewonnenen Ergebnisse sollen nun zur Konstruktion einiger weiterer Tafeln herangezogen werden; es soll jedoch bloß, wie bei P. Werkmeister, der Sonderfall $AB = C + D$ (bei ihm: $xy = u + v$) vertafelt werden. Wie sich zeigen wird, lassen sich einige der bereits von P. Werkmeister gewonnenen Tafeln als Sonderfälle unter den hier zugrunde gelegten einheitlichen Gesichtspunkt einordnen.

1. Will man Tafeln mit Doppelfluchtung (mit Zapfenlinie) erzielen, so ist die Zerfällung der gegebenen Gleichung in zwei Teilsysteme vorzunehmen:

$$AB = \zeta, \qquad C + D = \zeta.$$

Es sollen bloß die Tafeln betrachtet werden, die man durch Logarithmierung beider Teilsysteme erhält:

a) Das erste Teilsystem stellt die gewöhnliche Multiplikation dar, die entweder mittels Stechzirkel oder mittels einer auf der beim zweiten Teilsystem benötigten Geradenbildtafel — am zweckmäßigsten auf der lotrechten Asymptote — angebrachten logarithmischen Leiter bewerkstelligt wird. Das zweite Teilsystem wird gemäß »I« durch eine logarithmische Doppelleiter und Verwendung der bereits erwähnten logarithmischen Geradenbildtafel dargestellt. Es ist zweckmäßig (s. u.), das zweite Teilsystem in der Form $D = \zeta - C$ zu schreiben. Die Konstruktion der Tafel erübrigt sich, sie würde aus der bloßen Mittelleiter der Abb. 27 bestehen.

b) Will man auch das erste Teilsystem als Tafel darstellen, so ist die bekannte Multiplikationstafel von M. d'Ocagne mit drei parallelen Leitern heranzuziehen. Für das

γ) Tafeln mit Parallelenschar (Rechtwinkelkreuz) als Ablesegerät. M. d'Ocagne (1)[1]) und R. Soreau (1a)[2]) geben die für diese Gleichung von M. Béghin entworfene Tafel mit Parallelenschar als Ablesegerät wieder, letzterer auch eine von ihm entworfene Tafel mit Rechtwinkelkreuz als Ablesevorrichtung. Beide Tafeln sollen — bis auf die Maßstabfaktoren — hier neu hergeleitet werden.

1. Wird in $K^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + p (K \operatorname{tg} \varphi - {}^1/_3) = 0$, $K = v/u$ gesetzt, so erhält man zunächst

$$v^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + p\, u (v \operatorname{tg} \varphi - {}^1/_3\, u) = 0 .$$

Wird vorgeschrieben

$$p (v \operatorname{tg} \varphi - {}^1/_3\, u) = - (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) ,$$

so erhält man als Gl. d. L.K. $v^2 = u$.

Setzt man schließlich $v/u = x$, $1/u = \mu\, y$, so erhält man

als Gl. d. A.F. $$x = - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{p \operatorname{tg} \varphi} \mu\, y + \frac{1}{3 \operatorname{tg} \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (I),$$

als Gl. d. L.K. $$x^2 = \mu\, y \quad \ldots \ldots \quad (II),$$

deren Bez. erfolgt nach $$x = K \quad \ldots \ldots \quad (III).$$

Es ergibt sich mit $\mu = 0{,}5$ die Béghinsche Tafel (Abb. 20c). Daselbst ist der Fall $\varphi = 45^0$, $p = 0{,}75$, $K = 0{,}29$ dargestellt.

2. Aus $v \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{3} u = - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{p}$ erhält man mit $\frac{u}{3\,v} = y$, $\frac{1}{v} = x$

als Gl. d. A.F. $$y = x \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{p} + \operatorname{tg} \varphi \quad \ldots \ldots \quad (I),$$

als Gl. d. L.K. $$3\, x\, y = 1 \quad \ldots \ldots \quad (II),$$

deren Bez. erfolgt nach $$y = K \quad \ldots \ldots \quad (III).$$

Abb. 20d stellt eine mit abaque 81 des R. Soreauschen Werkes im wesentlichen identische Tafel dar. Daselbst ist $\varphi = 30^0$, $p = 0{,}75$, $K = 0{,}3$.

Wie leicht einzusehen, stellen die in »II« als Gegenstück des Index mit Parallelenschar im logarithmischen System behandelten Beispiele auch im gewöhnlichen System Tafeln mit diesem Ablesegerät dar, was mir dort entgangen ist.

Kanonische Form $f_1{}^2 + a\, f_2\, f_3 + b\, f_3{}^2 = f_2{}^2$. Obwohl diese Form bereits in »II« in einen Rechenschieber mit drehbarem Läufer vertafelt wurde, soll nochmals darauf zurückgekommen werden, da sie auch über die Abbildung von H. Poincaré in diese Form gebracht werden kann. R. Soreau (1a)[3]) behandelt bei den Netztafeln mit drei Veränderlichen, die zwei Scharen von Geraden und eine Schar Kreise enthalten, die »abaques cartésiens« und »a. non cartésiens«, jenachdem ob die Geradenscharen die Koordinatenlinien eines kartesischen Systems sind oder nicht. Zu den letzteren gehört das in »II« und soeben behandelte Beispiel der Böschungsmauern, für das er bei dieser Gelegenheit die abaques 18 bis 20 gibt (s. »II«); es werde daher nicht weiter darauf eingegangen.

Bei den abaques cartésiens gibt er das folgende, der Ballistik entnommene Beispiel — sowie in abaque 13 die Tafel von Ricour —, das auf folgender Gleichung beruht

$$R^2 + 2 (\sqrt{2} - 1)\, h^2 - 2 (\sqrt{2} - 1)\, h\, H = H^2 .$$

Wie leicht ersichtlich, ordnet sich dieses Beispiel der obigen Form unter. Wird gesetzt $f_1 = x$, $\sqrt{b}\, f_3 = y$, so entsteht

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{\sqrt{b}} f_2\, y = f_2{}^2 \quad \ldots \ldots \quad (a).$$

Es enthält also die Tafel die Scharen der Achsenparallelen, sowie die Kreisschar, die durch (a) festgelegt ist.

Setzt man $\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{Y}{X}$, $\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{X}$, so entsteht der Rechenschieber; es lautet die

Gl. d. A.F. $$1 + \frac{a}{\sqrt{b}} f_2 \frac{Y}{X} = \frac{f_2{}^2}{X} \quad \ldots \ldots \quad (I),$$

die Gl. d. L.K. $$Y = \sqrt{b}\, f_3 \quad \ldots \ldots \quad (II),$$

deren Bez. erfolgt nach $$Y^2 = X - f_1{}^2 \quad \ldots \ldots \quad (III).$$

[1]) S. 367. — [2]) S. 362 (abaques 80 und 81). — [3]) S. 84.

Es ergibt sich auch hier die verschiebbare Parabel (III), die nach (II) zu beziffern ist. Da hier der Ablesefaden nur von einem Parameter abhängig ist, kann er eingezeichnet werden; es entfällt dann der Läufer und die Parabel ist auf durchsichtigem Papier aufzuzeichnen und in bekannter Weise zu verschieben.

10. Beziehungen zwischen mehr als drei Veränderlichen.

a) Doppelte Fluchtung mit Zapfenlinie.

1. Kanonische Form $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$. Abb. 21 zeigt die Tafel für $A + B = C + D$; daselbst ist $A = 3$, $B = 1$, $C = 2$. Sie entsteht aus der Tafel für die kanonische Form I durch Koppelung.

2. Kanonische Form $f_1 f_2 = f_3 f_4$. Sie entsteht aus der kanonischen Form II ebenfalls ohne weitere Schwierigkeiten. Die Zapfenlinie ist hier ein Kreis. Abb. 22 zeigt die Tafel $AB = CD$ für $A = 1$, $B = 1$, $C = 0{,}5$.

3. Kanonische Form $f_1 f_2 = f_3 + f_4$. Abb. 23 zeigt die Tafel für $AB = C + D$. Hierbei ist die Konstruktion des Mittelpunktes M, sowie der Ableseschlüssel angedeutet. Es sind zwei Zapfenlinien vorhanden, von denen die eine die D-Leiter trägt. Der Wert auf Zapfenlinie I ist von 0 aus auf Zapfenlinie zwei hinüberzudrehen. Die Tafel ist bei gegebenem A, B und C oder D anzuwenden und ist die »Ablesung« mit alleiniger Benutzung des Stechzirkels möglich. Abb. 23 zeigt den Fall $A = 4$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 3$.

b) Doppelte Fluchtung im Winkel (mit Parallelenschar).

Während sich die von R. Soreau (1a)[1]) behandelten Formen 1) $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$, 2) $f_1 f_2 = f_3 f_4$, 3) $f_1 = f_2 (f_3 + f_4)$ anscheinend hier nicht unter dem neuen Gesichtspunkte

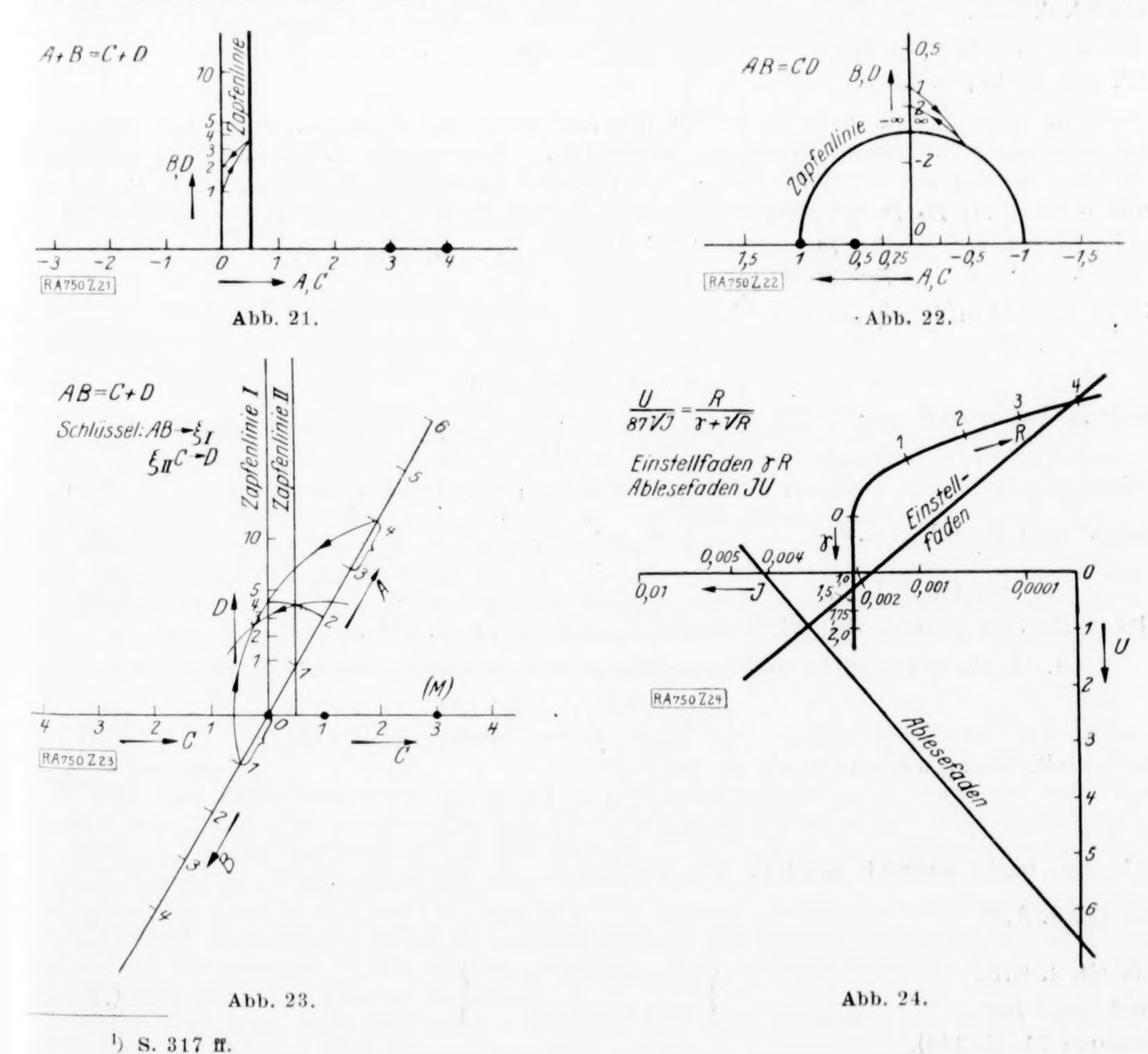


Abb. 21. Abb. 22.

Abb. 23. Abb. 24.

[1]) S. 317 ff.

behandeln lassen, ergeben sich die, für die Form 4) $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}=\frac{f_3+f_4}{g_3+g_4}$ von ihm gewählten Beispiele auf ganz einfache Weise; sie sollen daher sämtlich wiedergegeben werden.

1. Das **erste** Beispiel betrifft die **Bazinsche** Formel. Es ergibt sich nach leichter Rechnung (s. »II«)

als Gl. d. A.F. $$y=\frac{87\sqrt{J}}{U}x+\gamma \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$y^2=x \quad \text{(II)},$$

deren Bez. erfolgt nach $$y=\frac{x}{\sqrt{R}} \quad \text{(III)}.$$

(S. Abb. 24). Das System U, J wurde parallel zu sich seitlich verschoben, was ja erlaubt ist. Die Abb. zeigt den Fall $\gamma=1,3$, $R=4$, $J=0{,}004$, $U=6{,}6$.

2. Als **zweites** Beispiel diene die in »II« ebenfalls bereits behandelte alte Eichungsformel der Union des Yachts français:

$$130\frac{T}{\sqrt{S}}=Lp-\frac{p^2}{4} \qquad \text{(s. »II«)}.$$

Wird gesetzt: $p=-1/x$, $p^2/4=y/x$, so erhält man

als Gl. d. A.F. $$130\frac{T}{\sqrt{S}}x=-L-y \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$yx={}^1/_4 \quad \text{(II)}.$$

deren Bez. erfolgt nach $$x=-1/p \quad \text{(III)}.$$

(S. abaque 74, S. 340).

3. Das **dritte** Beispiel betrifft die Auflösung der Dreiecke, wenn drei Elemente bekannt sind, von denen eines ein Winkel ist. Hierfür gibt R. **Soreau** (1a) nebst der Fluchtlinientafel die Netztafel von J. **Lallemand** in abaque 57 wieder. Sind α_1, α_2, α_3 die Winkel, γ_1, γ_2, γ_3 die entgegengesetzten Seiten, so gilt für $\gamma_2>\gamma_3$ die Beziehung:

$$\frac{\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_2+\gamma_3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1/2}{\operatorname{tg}[\pi-(\alpha_2+\alpha_1/2)]}, \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi).$$

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha_1/2=t_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=T_2$, so schreibt sich die Gleichung in der Form

$$\frac{\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_2+\gamma_3}=\frac{t_1-1/T_2}{1/t_1+1/T_2}.$$

Durch Umformung ergibt sich $$-\frac{\gamma_2}{\gamma_3}=\frac{t_1+1/t_1}{t_1-1/t_1-2/T_2}.$$

Mit $$t_1+1/t_1=-x, \qquad t_1-1/t_1=y \quad \text{(III)},$$

ergibt sich als Gl. d. A.F. $$y=-\frac{\gamma_2}{\gamma_3}x+\frac{2}{T_2} \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. $$x^2-y^2=4 \quad \text{(II)},$$

deren Bez. nach einer der Gl. (III) erfolgt (abaque 73, S. 339).

4. Auch das **vierte** und letzte Beispiel R. **Soreaus**, das die Formel

$$W=\frac{3300\,T}{D}\left(5-\frac{L+12}{T+60}\right)$$

behandelt, kann, wenn man sie in der Form

$$\frac{D}{3300/W}=\frac{5\,(57{,}6+L)-L}{1+60/T}$$

schreibt, leicht vertafelt werden. Es ergibt sich

als Gl. d. A.F. $$y=\frac{D}{3300/W}x+L \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L.K. und ihrer Bez. $$\left\{\begin{array}{l} y=5\,(57{,}6+T) \\ x=1+60/T \end{array}\right\} \quad \text{(II), (III)}$$

(abaque 74, S. 339).

c) Tafeln mit Doppelkotenpunkten.

Hier werde das bereits in »II« gegebene H. Schwerdtsche Beispiel, die Gleichung

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma + \delta}{\gamma - \delta}$$

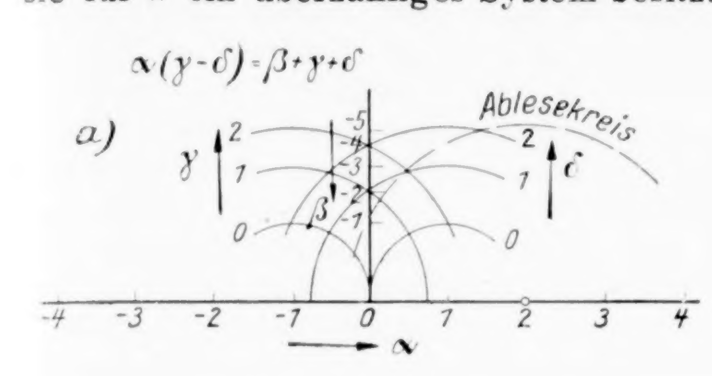
wieder vertafelt.

α) Abb. v. H. Poincaré: Abb. 25a: $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 2:\ \delta = 1$

Abb. 25b: $\beta = 3,\ \gamma = 1{,}5,\ \delta = 1:\ \alpha = 3.$

Die erste Tafel ist nur bei gegebenem α zu gebrauchen, die letztere dient zur Berechnung von α bei gegebenen β, γ, δ.

β) Abb. v. E. Beltrami: Abb. 26 zeigt den Fall $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$. Auch diese Tafel kann nicht zur Berechnung von α verwendet werden, da sie für α ein überzähliges System besitzt.



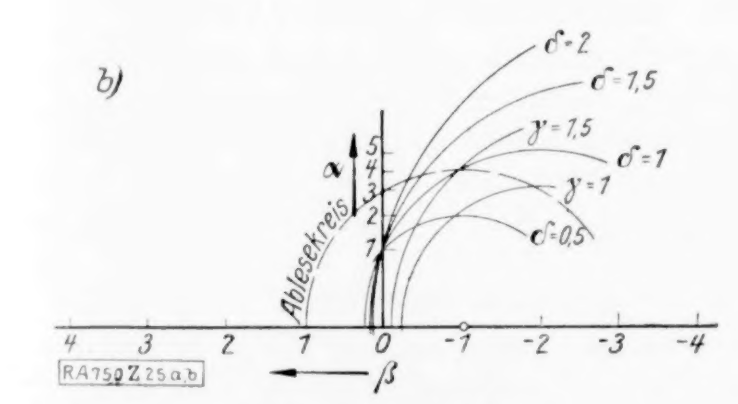


Abb. 25a und 25b.

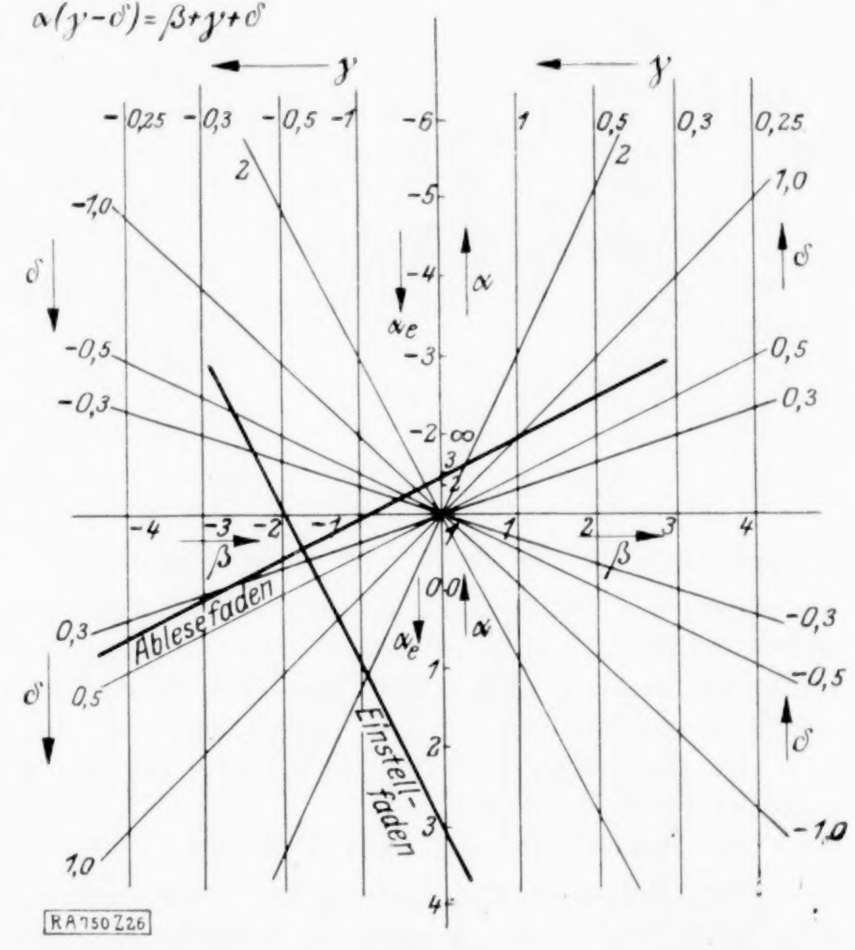


Abb. 26.

11. Einige Tafeln für Gleichungen von der Form $f_1 f_2 = f_3 + f_4$. In Band 4 (1924) dieser Zeitschrift gibt P. Werkmeister (1) einige Tafeln für Gleichungen dieser Form. Die in vorliegender Arbeit gewonnenen Ergebnisse sollen nun zur Konstruktion einiger weiterer Tafeln herangezogen werden; es soll jedoch bloß, wie bei P. Werkmeister, der Sonderfall $AB = C + D$ (bei ihm: $xy = u + v$) vertafelt werden. Wie sich zeigen wird, lassen sich einige der bereits von P. Werkmeister gewonnenen Tafeln als Sonderfälle unter den hier zugrunde gelegten einheitlichen Gesichtspunkt einordnen.

1. Will man Tafeln mit Doppelfluchtung (mit Zapfenlinie) erzielen, so ist die Zerfällung der gegebenen Gleichung in zwei Teilsysteme vorzunehmen:

$$AB = \zeta, \qquad C + D = \zeta.$$

Es sollen bloß die Tafeln betrachtet werden, die man durch Logarithmierung beider Teilsysteme erhält:

a) Das erste Teilsystem stellt die gewöhnliche Multiplikation dar, die entweder mittels Stechzirkel oder mittels einer auf der beim zweiten Teilsystem benötigten Geradenbildtafel — am zweckmäßigsten auf der lotrechten Asymptote — angebrachten logarithmischen Leiter bewerkstelligt wird. Das zweite Teilsystem wird gemäß »I« durch eine logarithmische Doppelleiter und Verwendung der bereits erwähnten logarithmischen Geradenbildtafel dargestellt. Es ist zweckmäßig (s. u.), das zweite Teilsystem in der Form $D = \zeta - C$ zu schreiben. Die Konstruktion der Tafel erübrigt sich, sie würde aus der bloßen Mittelleiter der Abb. 27 bestehen.

b) Will man auch das erste Teilsystem als Tafel darstellen, so ist die bekannte Multiplikationstafel von M. d'Ocagne mit drei parallelen Leitern heranzuziehen. Für das

zweite Teilsystem kommt wie oben die logarithmische Geradenbildtafel zur Anwendung. Es ist darauf zu achten, daß die mittlere (Produkt-) Leiter den halben Modul der äußeren Leitern besitzt und der Maßstab der logarithmischen Geradenbildtafel mit jenem der mittleren Leiter identisch sein muß. Auch hier ist die Form $D = \zeta - C$, der die Aeste $+-$ oder $-+$ je nach der Annahme über die Koeffizienten der Ablesegeraden entsprechen, verwendet worden. Wie leicht einzusehen, entspricht der Abb. 7 des Aufsatzes von P. Werkmeister der hier nicht betrachtete Ast $++$; da nämlich ζ auf dem Ast selbst liegt, ist die Einstellung der Geradenbildtafel nicht so einfach wie jene der Abb. 27. — Die Tafel ist ebenso wie alle hier gebrachten Tafeln prinzipiell für alle Kombinationen der gegebenen Größen brauchbar, besonders aber für den Fall, daß A, B und eine der Größen C oder D gegeben sind.

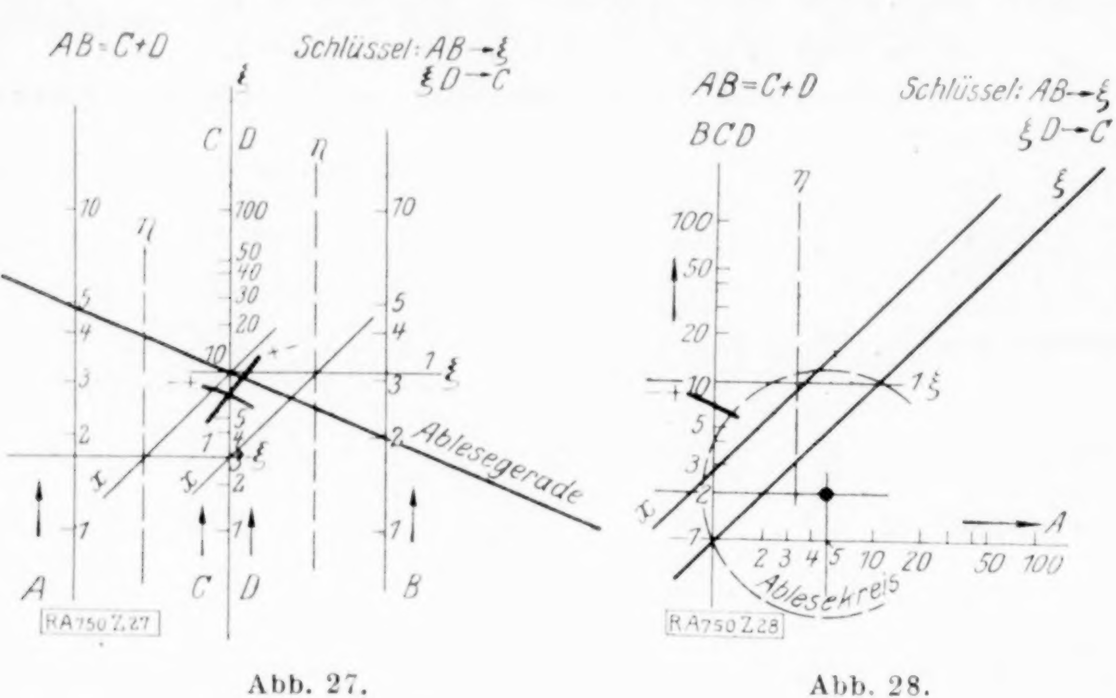


Abb. 27. Abb. 28.

c) Bei den Tafeln mit **kreisförmiger Ableselinie** (siehe Abb. 28) sollte eigentlich eine logarithmische Geradenbildtafel mit $\sqrt{2}$-facher Maßstabeinheit der Achsenleitern benutzt werden; wie aus der allgemeinen Theorie aber hervorgeht, kann dies umgangen werden, da die ζ-Werte auf der Achsenparallelen liegen. Es kann also die Geradenbildtafel auf einer der Achsen A oder B orientiert werden. Auch hier gilt bezüglich der Brauchbarkeit das unter b) Gesagte.

In den Abb. 27 und 28 ist die Ablesung für $A = 5$, $B = 2$, $C = 3$ durchgeführt; es ergibt sich $D = 7$.

d) Die Abbildung v. H. Poincaré wurde im vorstehenden behandelt.

2. Will man die Anwendung von doppelten Fluchten umgehen, so kann man, wie leicht ersichtlich, die gegebene Gleichungsform als eine Verallgemeinerung der ersten

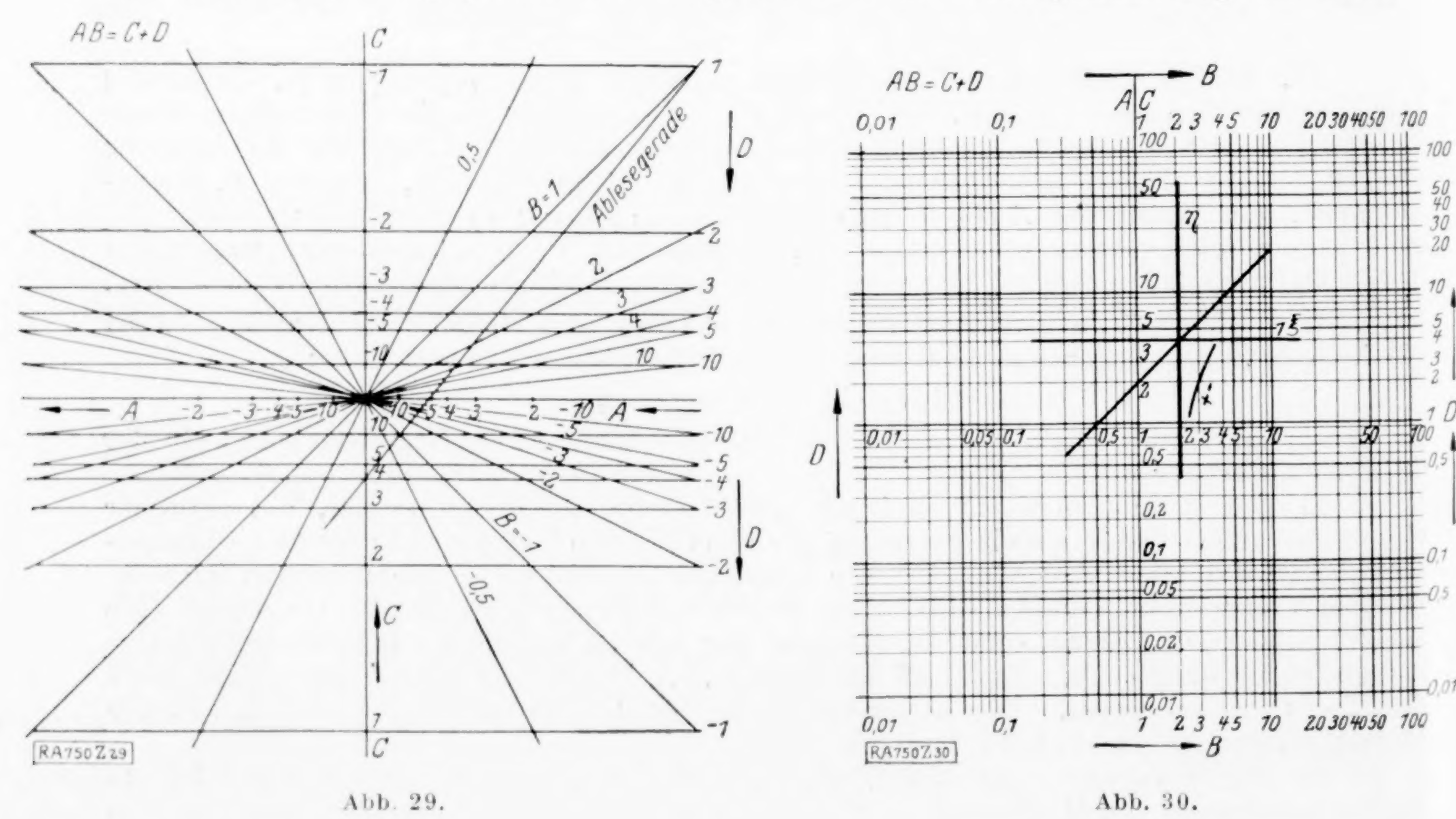


Abb. 29. Abb. 30.

kanonischen Form behandeln. Eine unmittelbarere Lösung, die zu denselben Ergebnissen wie das soeben angedeutete Verfahren führt, ergibt die folgenden »verallgemeinerten Doppelstrahlentafeln«, die man auch als »Tafeln mit Doppelkotenpunkten« bezeichnen könnte. P. Werkmeister gibt in den Abb. 5 und 6 seines Aufsatzes »Tafeln mit verdichteten Punkten«.

Setzt man in der gegebenen Gleichung $B = \xi/\eta$, so erhält man zunächst $A\,\xi = C\,\eta + D\,\eta$. Schreibt man z. B. vor: $D\,\eta = 1$, so erhält man folgende Tafeln:

a) Gewöhnliche Maßstäbe: Abb. 29, daselbst ist $A = 5$, $B = 1$, $C = 4$.

b) Logarithmische Maßstäbe: Abb. 30, hier ist $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$. Wie ersichtlich, kann das gewöhnliche doppeltlogarithmische Papier bereits ohne weiteres für Tafeln dieser Art verwendet werden.

c) Kreisförmige Ableselinie: Abb. 31, $A = 2$, $B = 0{,}5$ $C = -1$.

d) Rechenschieber: Abb. 32, $A = 2$, $B = 4$, $C = 5$. Das kartesische Netz in Abb. 32 könnte durch eine nach B bezifferte Lotrechte ersetzt werden, die jeweils in D einzustellen und daher auf einer verschiebbaren durchsichtigen Zunge anzubringen wäre (s. »II«: Nietformel des Board of Trade).

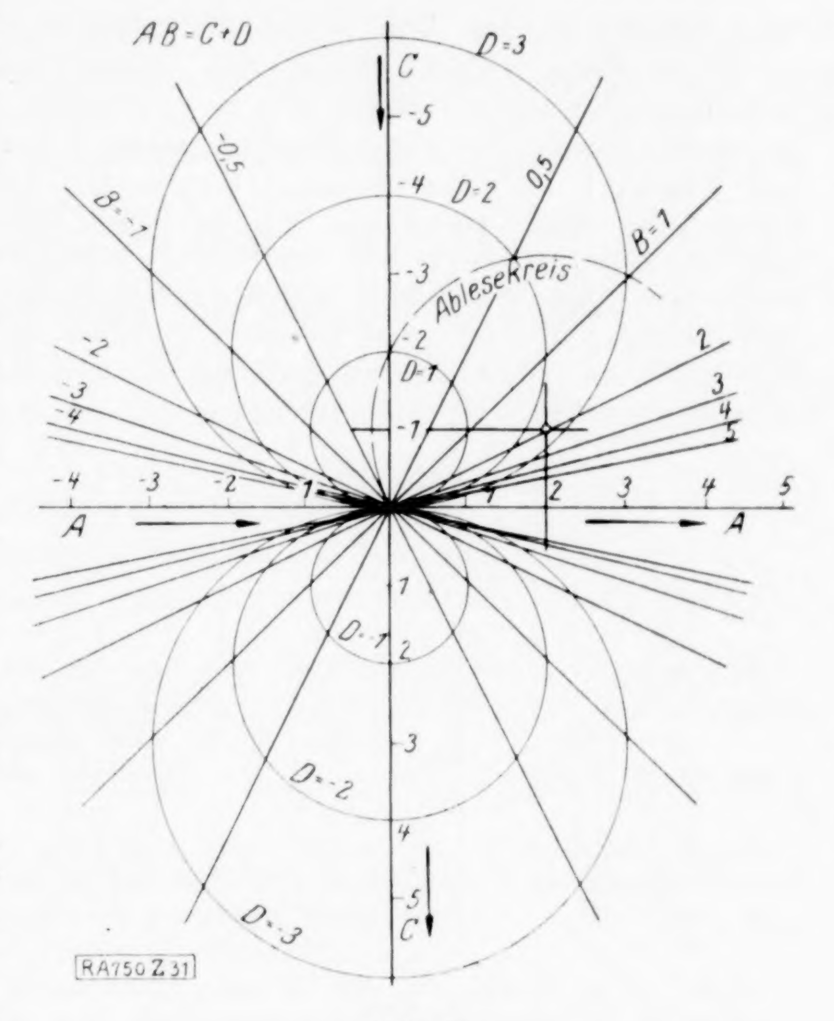


Abb. 31.

Die bisher behandelten Tafeln sind besonders dann gut brauchbar, falls C, D und eine der Größen A und B gegeben sind.

e) Abb. v. H. Poincaré:

Mit $\xi = \frac{2\,x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{2}{x^2 + y^2}$ ergibt sich Abbild. 33; wie leicht ersichtlich, erhält man die Tafel, die in Abb. 12 des Aufsatzes von P. Werkmeister dargestellt ist. Auch die von H. Schwerdt (1) für diese Form gegebenen Tafeln[1]) sind im wesentlichen mit Abb. 33 identisch. (Daselbst ist $A = 5$, $B = -4$, $C = 30$.)

f) Die Abb. v. E. Beltrami gibt mit

$$\xi = \frac{x}{1 + y}, \quad \eta = \frac{1 - y}{1 + y}$$

die Abbild. 34; hierin ist $A = 4$, $B = -1$, $C = -3$.

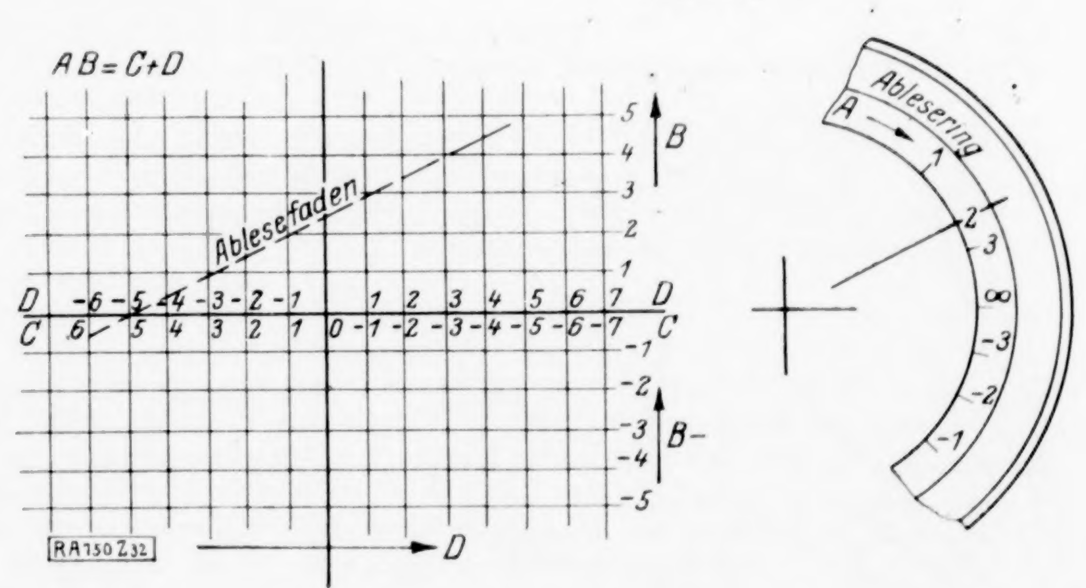


Abb. 32.

Außer diesen Tafeln, die aus einer von ihnen durch Abbildung hervorgehen, sollen noch folgende gegeben werden.

g) Eine Vereinigung von Chénevier-Tafel[2]) und der im vorstehenden auch elementar hergeleiteten Tafel mit äquidistanten Punkten gibt Abb. 35; daselbst ist der Fall $C = 2$, $D = 3$, $A = 5$ eingezeichnet.

h) Will man eine Tafel mit Parallelenindex bzw. Rechtwinkelkreuz, so ist die Gl. zu schreiben $\frac{A}{1/B} = C + D$ und setzt man $D = \frac{v}{u}$, wobei man $u = 1$ vorschreibt,

[1]) S. 246.

[2]) S. H. Schwerdt (1), S. 108 (vergl. auch »II«).

so erhält man

als Gl. d. A.F. $\quad v = \frac{A}{1/B} u - C$ . . . . (I),

als Gl. d. L.K. $\quad u = 1$ . . . . (II),

deren Bez. erfolgt nach $\quad D = v$ . . . . (III).

Man erhielte so die Abb. 9 des Aufsatzes von P. Werkmeister.

i) Eine weitere Tafel mit Parallelenindex bzw. Rechtwinkelkreuz ergibt sich folgendermaßen: Setzt man z. B. $B = x$, $C = y$, so lautet die Gl. d. A.F.: $y = A\,x - D$. Es geht dann der Einstellfaden stets durch den Punkt 1 auf der x-Achse hindurch; das kartesische Netz ist dann bereits L.K. bzw. Bez. (vergl. auch »I«).

j) Schließlich soll noch eine Tafel ge-

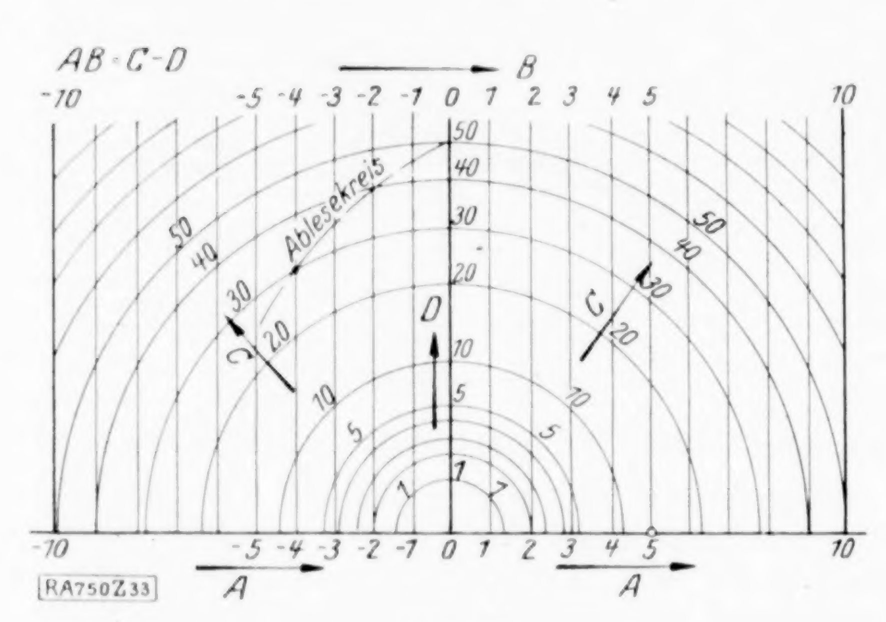


Abb. 33.

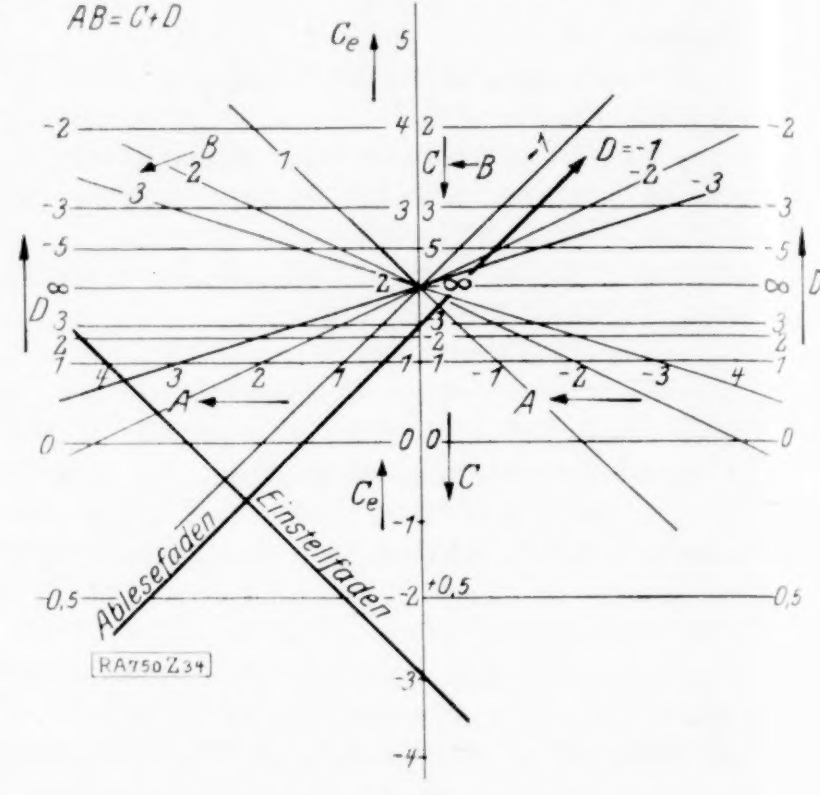


Abb. 34.

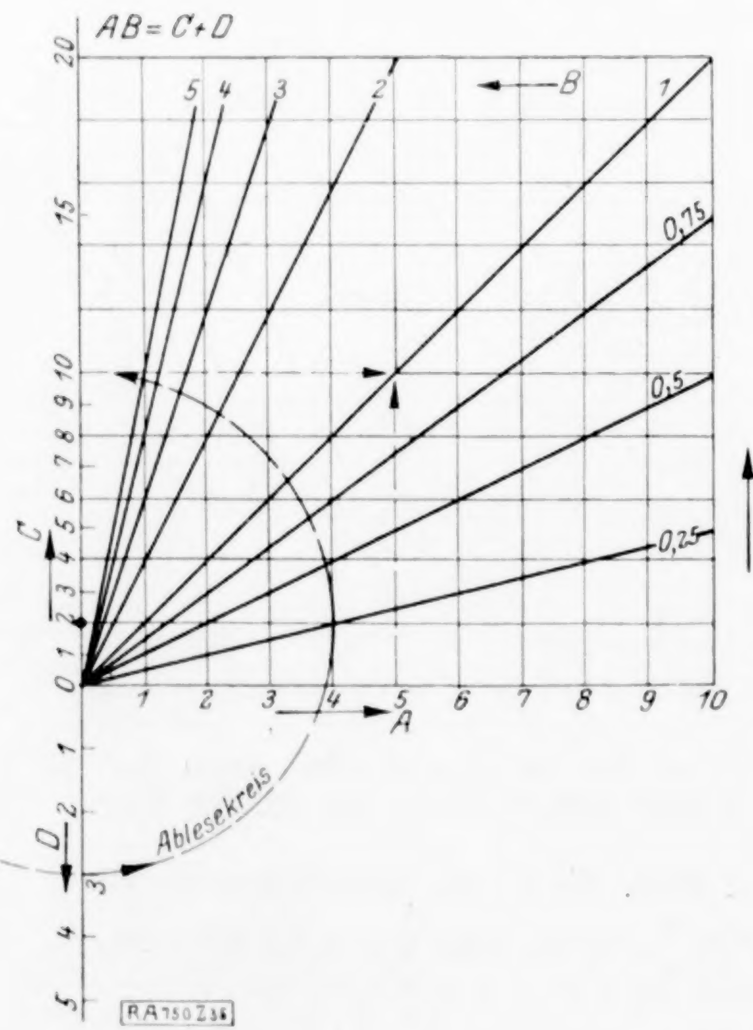


Abb. 35.

geben werden, die aus der verallgemeinerten kanonischen Form IV: $f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\,g_3 + h_3\,h_4 = 0$ mit $f_3 \equiv 0$ durch die Abb. v. E. Beltrami entsteht, wenn die Funktion h_4 mit dem Maßstab μ_1 in Verbindung gebracht wird. Es ist $h_4\,\mu_1 = 1$ (Abb. 36).

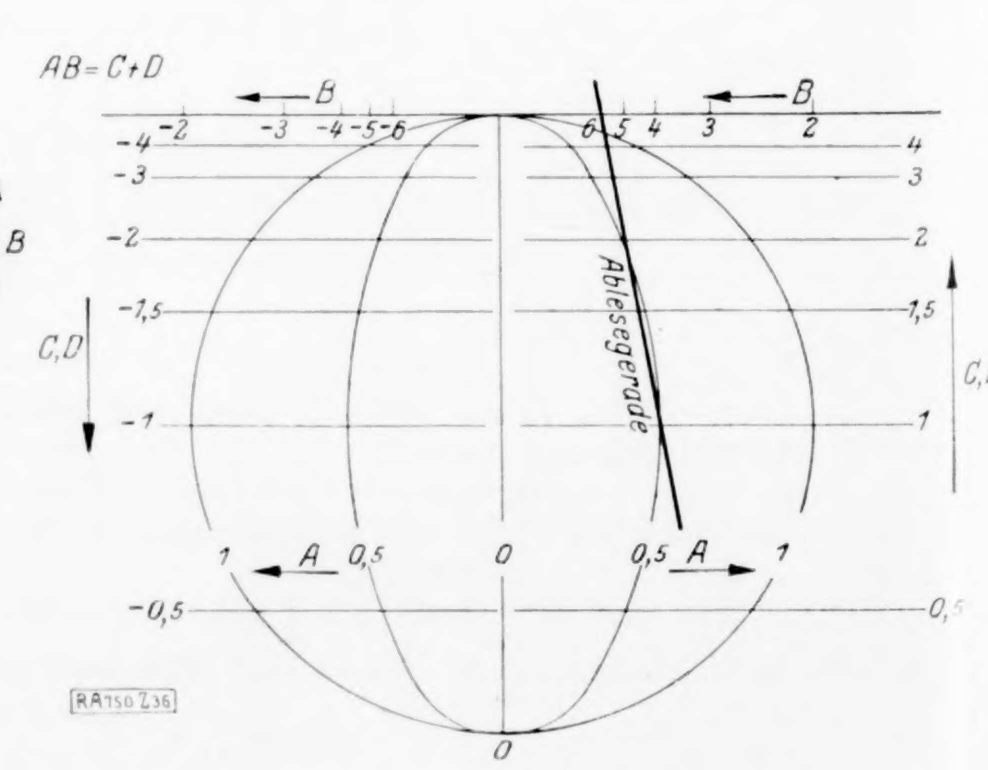


Abb. 36.

Anmerkung: In seinem Aufsatz: »Nomogramme für die Oberfläche des Quaders«, die auf Grund der Gleichung

$$f = 2\,(a\,b + a\,c + b\,c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

gewonnen werden, verweist P. Luckey (5) auf die Möglichkeit, die Tafeln, die von P. Werkmeister gewonnen wurden, für den ebengenannten Zweck heranziehen zu können. Er schreibt die Gl. (a) zu diesem Behufe in der Form

$$a^2 + f/2 = (a + b)\,(a + c)$$

und wären dann a, $a + b$, $a + c$, f als Veränderliche anzusehen, wobei die Summen im Kopfe zu bilden wären.

Die Gleichung läßt sich aber auch unter den vorliegenden kanonischen Typus bringen, wenn man sie schreibt $f/2 - a\,b = c\,(a + b)$.

Hier wären bei den Tafeln in gewöhnlichen Maßstäben die Größen $a + b$ und $a\,b$ durch Nebenrechnung zu bilden; in Tafeln mit logarithmischen Maßstäben sind alle diese Operationen mit Hilfe des $+\,+$ Astes der log. Geradenbildtafel bzw. mit dem Stechzirkel mechanisch durchführbar. Den Nachteil, daß a nicht als Unbekannte auftreten darf, teilt diese Form mit jener bereits von P. Luckey betrachteten; er ist aber nicht schwerwiegend.

Verzeichnis der benutzten Schriften*).

Außer den in »I« und »II« angegebenen Schriften wurden berücksichtigt:

L. Bianchi: 1. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autor. deutsche Uebersetzung von M. Lukat (1. Aufl.), B. G. T. 1899.

W. Blaschke: 1. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Band: Elementare Differentialgeometrie. 1. Aufl., J. Spr. 1921 (»Grundlehren der mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band I«).

R. Bonola - H. Liebmann: 1. Die Nichteuklidische Geometrie. 2. Aufl., B. G. T. 1919 (»Wissenschaft und Hypothese, Band 4«).

G. Darboux: 1. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. c) (3. partie): Lignes géodésiques et courbure géodésique, paramètres différentiels, déformation des surfaces, G. V. 1894. 2. Principes de Géométrie analytique. G. V. 1917.

H. Fürle: 1. Rechenblätter. Jahresber. d. IX. Realschule. Berlin 1902.

F. Klein: 1. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 1. Bd. 2 Aufl. B. G. T. 1908.
2 Vorlesungen über Höhere Geometrie, 3. Aufl., bearbeitet u. herausgegeben v. W. Blaschke. J. Spr. 1926 (»Grundlehren Bd. XXII«).

B. M. Konorski: 1. Die Grundlagen der Nomographie. J. Spr. 1923.

W. Kretschmer: 2. Zweidimensionaler Rechenschieber. Deutsches Reichspatent, Patentschrift 410,271, Kl. 42 m, Gr. 20 (K 90101 IX/42 m).

M. v. Laue: 1. Die Relativitätstheorie. 2. Band: Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft (Kap. I bis IV). Fr. V. 1921 (»Die Wissenschaft, Bd. 68«).

P. Luckey: 3. Nomographische Darstellungsmöglichkeiten. Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), Heft 1.
4. Einführung in die Nomographie. 2. Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine. B. G. T. 1920 (Math.-Phys. Bibliothek Bd 37).
5 Nomogramme für die Oberfläche des Quaders. Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 262.

E. Pascal - H. E. Timerding: 1. Repertorium der Höheren Mathematik. 2. Band: Geometrie. B. G. T. 1 a. Erste Hälfte: Grundlagen und Ebene Geometrie (Kap II, H. Liebmann: »Ebene Kreisgeometrie« und Kap. XXIV J. Mollerup: »Die nichteukl. Geometrie«), 1910. 1 b. Zweite Hälfte: Raumgeometrie (Kap. XLI und XLII, E. Salkowski: »Allgemeine Flächentheorie« und »Besondere Flächenklassen und Flächensysteme«), 1922.

G. Scheffers: 1. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 2. Band: Einführung in die Theorie der Flächen (1. Aufl). Veit & Co., Leipzig 1902.

P. Schreiber: 1. [Bespr. d. R. v. Mises, diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), H 4, S. 325] Grundzüge einer Flächennomographie, gegründet auf graphische Darstellungen in Funktionspapieren mit gleichmäßiger und logarithmischer Teilung, H. 1 (1921). 2. Anleitungen zum praktischen Zahlenrechnen mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel [Grundzüge H. 2 (1922)], Fr. V. 3. Ueber die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Diese Zeitschr. Bd. 2 (1922), H. 3, S. 201.

Serret - Scheffers: 1. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 1. Band: Differentialrechnung, 6. und 7. Aufl, B. G T. 1915.

H. Schwerdt: 2. [Bespr. v. H. Schwerdt (1) d. L. Bieberbach, Jahrb. d. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung 35 (1926), 2. Abt., S. 63 (H. 1 bis 4), B. G T. 1926].

P. Werkmeister: 1. Graphische Rechentafeln für die Form $x\,y = u + v$. Diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), Heft 3.

750

Göding (Mähren), im November 1926.

---

*) Abkürzungen: B. G. T. = B. G. Teubner, Leipzig-Berlin. — J. Spr. = Julius Springer, Berlin. — G. V. = Gauthier-Villars, Paris. — Fr. V. = Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Handbuch der Experimentalphysik. Herausgegeben von W. Wien-München und F. Harms-Würzburg. Bd. 6: Prof. Dr. G. Bakker, Den Haag, Kapillarität und Oberflächenspannung. Mit 114 Abb. XV + 458 S. Preis brosch. 42 M, geb. 44 M. Bd. 7, 1. Teil: P. Niggli, o. Prof. an der Technischen Hochschule und Universität Zürich, Kristallographische und strukturtheoretische Grundbegriffe. Mit 131 Abb. XII + 317 S. Akademische Verlagsges., Leipzig 1928.

Von dem »süddeutschen« Handbuch der Physik, von dem die ersten Bände hier bereits ausführlich angezeigt wurden[1], sind zwei neue erschienen, die in mannigfacher Weise das Interesse unserer Leser in Anspruch nehmen werden. Der Holländer Bakker gibt eine ausführliche, auch die Theorie eingehend berücksichtigende Darstellung der Kapillarität und Oberflächenspannung. Man wird kaum eine den Gegenstand betreffende Frage finden, die nicht sorgfältig behandelt würde. So findet man z. B. auch reiches Material über die Berechnung und Konstruktion der Gestalten rotationssymmetrischer Tropfen. Das Buch schließt mit einer Wiedergabe der vom Verfasser ausgebauten Theorie der Kapillarität, bei der die Kapillarschicht als Uebergangsschicht zwischen Flüssigkeit und Dampf energetisch betrachtet wird.

In dem kürzlich erschienenen 7. Bande gibt P. Niggli eine Uebersicht über die Grundlagen der Kristallberechnung und die Bestimmung der Kristallstrukturen. Die Behandlung ist eine vorwiegend theoretische unter starker Verwendung algebraischer Methoden. Dabei setzt jedoch das Buch keinerlei Vorkenntnisse in algebraischer Richtung voraus und ist für jeden, mit den ersten Elementen der Algebra Vertrauten leicht lesbar. Mises. 913

Dr. R. BECKER, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin, **Dr. H. PLAUT** und **Dr. I. RUNGE.** Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation. Mit 24 Abb. im Text. Julius Springer, Berlin 1927. VI + 117 S.

Die Verfasser haben es sich zur Aufgabe gestellt, an einem ganz konkreten Beispiel die Anwendung statistischer Methoden in der industriellen Technik zu erläutern. Es handelt sich dabei um die Untersuchung der wesentlichen Eigenschaften einer durch Massenfabrikation hergestellten Menge von Glühlampen. Beim Leser werden keinerlei Vorkenntnisse aus der Statistik vorausgesetzt; auch die ersten Grundbegriffe, Mittelwert, Streuung, Verteilungskurve usf. werden ausführlich erklärt. Theoretisch gehen die Betrachtungen kaum über eine Diskussion der Laplaceschen Lösung des Bernoullischen Problems hinaus. Die wenigen Worte, die etwa über Korrelation gesagt werden, sind nicht sehr aufschlußreich. Die Trennung der ganzen Darstellung in einen »praktischen« und einen »mathematischen« Teil erscheint nicht ganz begründet. Zu dem letzten Abschnitt über »Poincarés charakteristische Funktion« sei die Bemerkung gestattet, daß es sich hier um nichts anderes als die von Laplace eingeführte Adjungierte oder »erzeugende Funktion« handelt. Im ganzen wird man dem flüssig und lesbar geschriebenen Buch weite Verbreitung wünschen dürfen, da es dem Ingenieur eine sehr zweckmäßige Einführung in ein für ihn noch neues und voraussichtlich sehr wichtiges Gebiet liefert.

Mises. 913

Professor Dr.-Ing. EUGEN MICHEL in Hannover. Raumakustisches Merkblatt. Verlag Curt R. Vincentz (Deutsche Bauhütte), Hannover 1927. 12 S.

Das kleine Heftchen steht in Zusammenhang mit der viel Erfolg versprechenden Entwicklung eines neuen Zweiges der technischen Wissenschaften: der Raumakustik. Der Verfasser hat einen in Amerika erschienenen Versuchsbericht frei bearbeitet. Manche Angaben der amerikanischen Experimentatoren muten freilich recht naiv an. So, wenn die Schalldämpfungsfähigkeit verschiedener Körper durch Koeffizienten ausgedrückt werden soll und beispielsweise angegeben wird: »einzelne Frau 0,54, einzelner Mann 0,48, gepolsterter Stuhl mit Lederbezug 0,30«. Immerhin ist die kleine Schrift aus den eingangs erwähnten allgemeinen Gründen der Beachtung wert.

Mises. 913

Dr. RUDOLF ROTHE, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil I: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. Mit 155 Fig. im Text. Zweite Auflage. Teubners Technische Leitfäden, Bd. 21. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. VII + 186 S. Preis 5 M.

Das Buch gibt in dem durch den Titel gekennzeichneten Umfang die in den Anfängervorlesungen über Differential- und Integralrechnung übliche Stoffauswahl. Der Verfasser selbst bezeichnet es als einen »sehr knapp gehaltenen Leitfaden«, dessen Lektüre »eine eigene kräftige und tapfere Mitarbeit des Lesers verlangt, die nicht von jedem ohne Schweißtropfen und stille Stoßseufzer geleistet werden wird«. Diese Knappheit der Darstellung bringt es mit sich, daß in den Hauptabschnitten die Definitionen der mathematischen Begriffe an

[1] Bd. 7 (1927), S. 243.

die Spitze gestellt werden, der anschauliche Inhalt erscheint dann in der Form des Beispiels. Das ist für den Anfänger ein beschwerlicher Weg. Das Buch ist deshalb zum Selbststudium wohl weniger zu empfehlen, wird aber im Gebrauch neben der Vorlesung sicher gute Dienste leisten. Der Ingenieurstudent wird ein wenig den Kontakt mit seinem Interessengebiet vermissen, das auch in den Uebungsbeispielen etwas zu kurz kommt.

Dresden. E. Trefftz. 886

C. W. **OSEEN, Professor an der Universität** Upsala. Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Mit 7 Textfiguren. Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, herausgegeb. von E. Hilb. Band 1. Akadem. Verlagsges. Leipzig 1927. XXIV + 337 S. Preis brosch. 22 M, geb. 24 M.

Die wertvollen und bisher nur zu wenig bekannten Arbeiten Oseens und seiner Schule zur theoretischen Hydromechanik sind hier zum ersten Mal in größerer Ausführlichkeit zusammengestellt, nachdem vorher ein kurzer Bericht über die Hauptpunkte der Untersuchungen im zweiten Bande der neuen Auflage von Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen erschienen war. Jedermann, der an den Fortschritten der hydromechanischen Forschung interessiert ist, wird dem Oseenschen Buche die größte Aufmerksamkeit widmen müssen.

Die physikalische Grundauffassung Oseens, die allerdings niemals explizite ausgesprochen wird, geht dahin, daß die klassischen Differentialgleichungen von Navier und Stokes die beobachtbaren Flüssigkeitsbewegungen richtig darstellen. Der Stützpunkt für diese Auffassung liegt wohl in folgendem. Da in den Gleichungen die Glieder, die die Zähigkeitszahl als Faktor enthalten, die Glieder höchster Ordnung sind, ist es selbstverständlich, daß es außer den Lösungen, die beim Uebergang zur Zähigkeit Null in die Lösungen für ideale Flüssigkeiten übergehen, auch noch andere geben muß (man macht sich diese Erscheinung am besten klar an irgend einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit Parameter im höchsten Glied, z. B. $\lambda y'' + y' = x$, deren allgemeine Lösung lautet $y = a + \frac{x^2}{2} - \lambda x + be^{-\frac{x}{\lambda}}$). Es liegt nun nahe zu vermuten, daß die eine Gruppe von Lösungen, die sich stetig an die reibungsfreien anschließen, den laminaren, die andere Gruppe den turbulenten Bewegungen entspricht. Aehnlich waren wohl auch die Voraussetzungen im Beginn der Prandtlschen Grenzschichttheorie vor etwa 20 Jahren. Inzwischen hat sich aber zweifellos herausgestellt, daß die aus den Navier-Stokesschen Gleichungen ableitbaren Grenzschichten oder Gleitschichten durchaus dem Typus der Laminarbewegung angehören und daß bei großen Geschwindigkeitswerten die Uebereinstimmung mit der Beobachtung verloren geht. Es ist meine Ueberzeugung, daß es sich auch bei den allgemeineren Oseenschen Problemstellungen nicht anders verhalten wird: Der gelegentliche Hinweis darauf, daß Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen gefunden werden, die turbulente Bewegungsformen darstellen, scheint mir nicht stichhaltig. Ich glaube nicht, daß man aus dem klassischen Ansatz, namentlich, wenn man nur stationäre Lösungen sucht, etwas anderes herausbekommen kann als Laminarströmungen; die Grundströmung turbulenter Bewegungsformen läßt sich viel eher als eine Lösung der Eulerschen, denn als eine solche der Navier-Stokesschen Gleichungen auffassen.

Aber wie dem auch sei, liegt selbstverständlich der Wert der Oseenschen Untersuchungen darin, daß die Tragweite der N. St.-Gleichungen durchforscht wird in einem Ausmaße wie es bisher auch nicht annähernd geschehen ist. Ein wichtiges Resultat der Oseenschen Untersuchungen, die Erweiterung der Stokesschen Formel für den Widerstand einer langsam bewegten Kugel ist ja seit langem bekannt. Dadurch, daß Oseen die nicht-linearen Glieder der Differentialgleichungen nicht in dem ursprünglichen Koordinatensystem, sondern in einem veränderten streicht, erhält er eine bessere Annäherung, die zu einer Ergänzung des Stokesschen Ausdrucks für den Widerstand durch ein der $\frac{3}{2}$ ten Potenz der Geschwindigkeit proportionales Glied führt. Erfahrungsgemäß wird dadurch den Beobachtungen für ein gewisses, über den Geltungsbereich der Stokesschen Formel hinausreichendes Gebiet Rechnung getragen. Das Buch bringt auch analoge Ergebnisse für die Bewegung eines Ellipsoids bei beliebiger Lage gegen die Bewegungsrichtung, für die Bewegung einer Kugel in einer Röhre, für die Bewegung von zwei Kugeln in unbegrenzter Flüssigkeit und ähnliche Fälle.

Das mathematische Prinzip der Oseenschen Untersuchungen besteht darin, für die linearisierten Gleichungen eine Theorie zu entwickeln, die der Potentialtheorie im Falle der Gleichung $\Delta u = 0$ analog ist. Es wird eine »Grundlösung« hergestellt und durch Uebereinanderlagerung solcher Grundlösungen versucht, beliebige Integrale darzustellen. Die Formeln werden dabei allerdings recht verwickelt, und es ist nicht immer leicht, den Rechnungen zu folgen.

Der dritte umfassende Teil des Buches beschäftigt sich mit der Aufgabe, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit in den linearisierten Gleichungen zu vollziehen. Die Ergebnisse, die dabei erzielt werden, scheinen in vielen Punkten mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu stehen. Es ergibt sich, daß hinter dem bewegten Körper ein Wirbelgebiet besteht, während sich an jeder andern Stelle die Flüssigkeitsströmung einer Potentialströmung nähert. Danach müßte man vermuten, daß die Vernachlässigungen, die in dem Oseenschen Ansatz stecken, den Gesamtverlauf der Lösung im großen Gan-

zen nicht beeinflussen. Andererseits ist aber klar, daß die Verhältnisse in der »Gleitschicht«, d. h. sowohl in der unmittelbaren Umgebung des eingetauchten Körpers, wie auch an der Grenze zwischen Potential- und Wirbelraum durch die linearisierten Gleichungen unmöglich richtig wiedergegeben werden können. Es liegt hier zweifellos noch eine ungelöste Schwierigkeit vor: man kann einerseits die genaue Gleichung ohne vollständige Randbedingungen beherrschen (Theorie der Gleitschicht), auf der andern Seite das Randwertproblem nur bei den gewaltsam vereinfachten Oseenschen Gleichungen in Angriff nehmen. Es scheint, daß eine Ueberwindung dieser Schwierigkeiten heute noch kaum in den Bereich des Möglichen fällt.

Das Buch von Oseen, dem ein Beitrag von Zeilon angefügt ist, gehört zweifellos zu dem Wichtigsten und Wertvollsten, was in den letzten Jahrzehnten auf dem Gebiete der Hydromechanik erschienen ist. Der Verlag und der Herausgeber der Sammlung, die mit diesem Bande eine größere Schriftenreihe eröffnen, haben mit dem Oseenschen Werk jedenfalls einen vortrefflichen Anfang gemacht. Es mag hinzugefügt werden, daß Druck und Ausstattung des Buches, die jedenfalls für die ganze Reihe maßgebend sein sollen, alles Lob verdienen. Mises. 915

Prof. Dr.-Ing. KARL **LAUDIEN,** Oberstudiendirektor der Staatlichen Höheren Maschinenbau-, Schiffsingenieur- und Seemaschinistenschule in Stettin. Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer. Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Erstes Heft: Statik und Dynamik. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 246 Textabb. VI + 179 S. Preis 5,50 M. Zweites Heft: Hydraulik. Mit 82 Textabb. 46 S. Preis 2,50 M. Julius Springer, Berlin 1927 u. 1928.

In den beiden kleinen Bändchen wird der herkömmliche Stoff in der üblichen Weise behandelt. Soweit eine Durchsicht erkennen läßt, sind die mechanischen Ueberlegungen einwandfrei. In der Hydraulik vermißt man an Versuchsergebnissen ziemlich alles, was in den letzten Jahrzehnten neu hinzugekommen ist.

Mises. 919

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt E. V. (W G L) 1927. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin. Preis 20 M.

Wie in den früheren Jahren enthält das Jahrbuch neben den geschäftlichen Mitteilungen die ausführlichen Berichte über die auf der Hauptversammlung gehaltenen Vorträge. Als von besonderem wissenschaftlichen Interesse mögen, abgesehen von dem Prandtlschen hydrodynamischen Film, die experimentellen Luftwirbeluntersuchungen von Tanakadate, die Rechnungen über den Eintritt des Trudelns von v. Baranoff und die Untersuchungen über den Auftrieb und die Druckverteilung in Flügelgittern von Schilhansl genannt werden. Im Anhang ist eine ausführliche Diskussion zwischen Ahlborn und den Vertretern der Prandtlschen Grenzschichttheorie wiedergegeben. Mises. 919

ARTHUR **HAAS,** Dr. phil. Prof. für Physik der Universität Wien. Materiewellen und Quantenmechanik. Eine elementare Einführung auf Grund der Theorien De Broglies, Schrödingers und Heisenbergs. Akadem. Verlagsges., Leipzig 1928. VIII + 160 S. Preis 6,50 M, geb. 7,50 M.

Die bekannte Darstellungsgabe, die der Verfasser öfter an ähnlichen Aufgaben bewährt hat, befähigt ihn dazu, in dem vorliegenden kleinen Büchlein eine durchaus brauchbare Uebersicht über die neuesten Fragen der theoretischen Physik zu liefern. Es ist nicht zu verlangen, daß bei einem Stoffe, der manchmal auch den nächststehenden Fachleuten nicht ganz verständlich ist, eine für einen weiteren Kreis bestimmte Darstellung völlig befriedigend sei. Allein zwischen einer ganz oberflächlichen Wiedergabe der Resultate und einer für den Mathematiker bestimmten Ableitung halten die Ausführungen von Haas die glückliche Mitte.

Mises. 919

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Prof. Dr. F. **AUERBACH,** Prof. Dr. W. **HORT,** Handbuch d. physikalischen u. technischen Mechanik. Band II, Lieferung 1. 187 Abb. im Text. VIII + 404 S. Preis 37,50 M. Band I, Lieferung 2. 303 Abb. im Text, VIII + 694 S. Preis brosch. 37,50 M. Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1928.

Dr. HUGO **DINGLER,** Professor an der Universität München. Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte. Verlag Ernst Reinharth, München 1928. 263 S. Preis 8,50 M.

M. ERICH **WINKEL,** Naturwissenschaft und Astrologie. Dom-Verlag M. Seitz & Co., Augsburg. 125 S. Preis 3,80 M, geb. 4,90 M.

Dr. K. **GIEBEL,** Direktor der Deutschen Uhrmacherschule, Glashütte (Sa). Das Pendel. Verlag Zentralverband der Deutschen Uhrmacher E. V. in Halle (Saale) 1928. IV + 190 S.

Dr. KARL **DOEHLEMANN,** weil. o. ö. Prof. an der Technischen Hochschule in München. Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Dritte, durchgesehene Auflage. Mit 91 Fig. und 11 Abb. Aus Natur und Geisteswelt. Band 510. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928. 108 S. Preis geb. 2 M.

E. **WICKE,** Studienrat am Helmholtz-Realgymnasium in Berlin-Schöneberg. Konforme Abbildungen. Mit 38 Figuren im Text. Mathematisch-Physikalische Bibliothek Nr. 73. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 59 S.

Prof. E. **SCHULTZ,** Mathematische und technische Tabellen für Berufsschulen, Handwerker- und Werkschulen. Tabel-

le V, Ausgabe V und IV vereinigt. Neu bearbeitet von Dipl.-Ing. Prof. Dr. S. Jakobi, Dipl.-Ing. O. Kehrmann, Studienräte der staatlichen Maschinenbauschulen in Elberfeld und Köln a. Rh. Zehnte Auflage, 229. bis 238. Tausend der Schultzschen Tabellen. G. D. Baedeker-Verlag, Essen 1928, Preis 2,60 M.

MEYER und **BRAUN,** Geometrie. Arbeitsbuch für die Mittelklassen der Oberlyzeen und Studienanstalten, die Lyzeen und höheren Mädchenschulen. Herausgegeben von J. Inkmann, C. Müller, Dr. W. Schwarz, J. Witte. Aschendorffsche Verlagsbuchh., Münster i. Westf. 1928. 204 S. Preis geb. 3,80 M.

Dr.-Ing. ERNST **SCHLEIERMACHER,** Wasserabfluß durch Stollen. Untersuchungen aus dem Flußbaulaboratorium der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. R. Oldenbourg, München und Berlin 1928. 55 S. Preis geh. 5,50 M.

Veröffentlichungen des Forschungs-Institutes der Rhön-Rossiten-Gesellschaft e. V. Herausgegeben vom Direktor Dr. WALTER **GEORGII,** Professor für Flugmeteorologie an der Technischen Hochschule Darmstadt. Jahrbuch 1926/27, Nr. 1. XIII + 31 S. Preis geh. 4 M. Verlag Oldenbourg, München und Berlin 1928.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Hamburg.

Im Rahmen der 90. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte findet die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft vom 19. bis 21. September statt.

Hierfür sind folgende Vorträge vorgesehen:

Mittwoch, den 19. September, nachm.: Hydrodynamik.

G. Kempf-Hamburg: Reibungsmessungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen.

A. Busemann-Göttingen: Zeichnerische Ermittlung von ebenen Strömungen mit Ueberschallgeschwindigkeit.

J. Nikuradse-Göttingen: Turbulente Strömungen in keilförmigen Kanälen.

L. Hopf-Aachen: Ueber die Geschwindigkeitsverteilung an einer Platte und an einem Rohr.

Th. Troller-Aachen: Zur Wirbeltheorie der Luftschrauben.

F. Eisner-Berlin: Physikalisches zur Vereinigung der Grenzschichttheorie mit der asymptotischen Widerstandstheorie.

M. Lagally-Dresden: Strömung im Außenraum zweier Kreise.

Donnerstag, den 20. September, vorm.: Statistik und Versicherung.

W. Dobbernack-Berlin: Die Einwirkungen von Krieg und Inflation auf die mathematischen Grundlagen der deutschen Sozialversicherung.

— Die versicherungsmathematischen Grundlagen der deutschen Arbeitslosenversicherung.

C. Burrau-Kopenhagen: Prämienrückgewähr bei Unfallversicherungen.

A. Basch-Wien: Fehlertensoren und Fehlerübertragung.

F. Baur-Berlin: Probleme der Mehrfachkorrelation.

R. Böhm-München: Einige Bemerkungen über die Theorie des Preises und über die damit zusammenhängenden Fragen des Grenznutzens in der theoretischen Nationalökonomie.

nachm.: Mechanik u. a.

H. Wagner-Danzig: Ueber die Zugdiagonalenfelder in dünnen Blechen.

H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Zur Praxis der Lösung linearer Gleichungen in der Statik.

W. Müller-Hannover: Zur hydrodynamischen Deutung der elliptischen Funktionen.

I. Malkin-Berlin: Zur Stabilitätsfrage rotierender elastischer Stäbe.

M. Herzberger-Jena: Geometrische Optik und differentielle Liniengeometrie.

St. Bergmann-Berlin: Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Transformator.

Freitag, den 21. September, nachm. gemeinsam mit der Gesellschaft für Technische Physik:

E. Schwerin-Berlin: Ueber Schüttelschwingungen gekoppelter Systeme.

G. Reutlinger-Darmstadt: Mechanische Schwingungsmesser hoher Empfindlichkeit.

H. Backhaus-Berlin: Ueber Strahlungs- und Richtwirkungseigenschaften von Schallstrahlen.

J. Trendelenburg-Berlin: Ueber Herztöne und Herzgeräusche.

E. W. Scripture-Wien: Die physikalische Natur der Vokale nach den neuesten Untersuchungen.

W. Cauer-Göttingen: Ueber Vierpole und Siebketten.

K. Pohlhausen-Berlin: Fragen aus der Physik der Hochspannungsventilröhren.

Freitag, den 21. September, vorm. 10 Uhr, findet die Geschäftssitzung der Gesellschaft statt. Hieran anschließend um 11 Uhr eine Besichtigung der Hamburger Schiffbau-Versuchsanstalt, die unter Leitung des Direktors Dr.-Ing. G. Kempf steht.

Ortsgruppe Berlin.

Am 29. Juni sprach Hr. Dr. F. Eisner-Berlin über »Berechnung des Widerstandes eines durch eine Flüssigkeit bewegten Kreiszylinders«. Am 13. Juli folgte ein Vortrag von Hrn. Dr. St. Bergmann-Berlin über »Wärmeströmung in einem Kreiszylinder«.

Ortsgruppe Göttingen.

Am 13. Juni sprach Hr. Dr. St. Bergmann-Berlin über »Die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Transformator mittels konformer Abbildung«.

Prager Mitglieder.

Am 22. Mai sprach Hr. Prof. Fritsche über »Theorie der Melan-Bauweise«.

2. Internationale Tagung für Brücken- und Hochbau in Wien. Die österreichischen Bauingenieure bereiten gegenwärtig die zweite internationale Tagung für Brücken- und Hochbau vor, die als Fortsetzung des 1926 in Zürich abgehaltenen Kongresses in Wien am 24. September eröffnet werden wird. Dem Ehrenausschuß des Kongresses gehören die Vorsitzenden der American Society of Civil Engineers, des Deutschen Eisenbau-Verbandes, des Deutschen Betonvereines, der Institution of Structural Engineers London, der Société des Ingénieurs Civils de France, des Sindacato Nazionale Fascista Ingegneri und des Schweizerischen Schulrates Zürich an. Die Leitung des Kongresses liegt in Händen der Professoren Friedrich Hartmann und Rudolf Saliger von der Wiener Technischen Hochschule. Für Berichterstattung über die grundlegenden Fragen des Eisen- und Eisenbetonbaus sind die hervorragendsten Fachleute aller Nationen gewonnen worden. Aus der Reihe der angekündigten Besprechungsgegenstände nennen wir nur die folgenden:

Die Stoßwirkung bewegter Lasten auf Brücken; Referenten: Fuller-Ames, Jowa; Godard-Paris; Penna-Madrid; Saliger-Wien. Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung; Referenten: Pigeaud-Paris; Roš-Zürich. Die Seitensteifigkeit offener Betonbrücken; Referenten: Hawranek-Brünn; Ostenfeld-Kopenhagen.

Wer an dem Kongreß teilzunehmen wünscht, wird durch die Geschäftsstelle Wien IV, Technische Hochschule, alles Nähere erfahren.

Mathematiker-Kongreß in Bologna. Seit dem Erscheinen des letzten Heftes ist über die Möglichkeit einer Beteiligung der Deutschen an dem Mathematiker-Kongreß in Bologna lebhaft diskutiert worden. Die in einem deutschen Rundschreiben verbreitete Behauptung, der Präsident des Kongresses, der zugleich der Vorsitzende der Union Mathématique Internationale ist, habe in einem offiziellen Schreiben Anfang Juni die Trennung des Kongresses von der Union erklärt, entspricht nicht den Tatsachen. Vielmehr steht zweifellos fest, daß die Bemühungen des italienischen Organisations-Ausschusses ständig dahin gingen, der Zurückhaltung, die ein Teil der deutschen Gelehrten dem Kongreß gegenüber bewahrte, durch Zugeständnisse zu begegnen, dabei aber die Verbindung mit der Union, der ursprünglich zur Boykottierung der deutschen Wissenschaft geschaffenen Organisation, durchaus aufrechtzuerhalten. Dagegen scheinen die Zugeständnisse, die den Deutschen tatsächlich gemacht wurden, der Leitung der Union in Paris schon zu weitgehend gewesen zu sein: es heißt, daß der Vorstand der Union Ende Juli von sich aus beschlossen habe, den Kongreß von Bologna nicht mehr als Unionskongreß zu betrachten und eine Erklärung in diesem Sinne zu veröffentlichen. Sollte die Erklärung wirklich erfolgen, so würde damit noch in letzter Stunde der Kongreß von Bologna auf die Stufe derjenigen wissenschaftlichen Veranstaltungen gehoben werden, die wirklich international und frei von politischen Bindungen sind und an denen teilzunehmen jedermann empfohlen werden kann.

Persönliches. Am 15. Juli verschied nach langem Leiden Hr. Oberregierungs- und Baurat Professor Dr.-Ing. ehr. Hans Detlef Krey, der Leiter der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin.

Hr. Prof. Dr. Th. v. Kármán, Leiter des Aerodynamischen Instituts an der Technischen Hochschule zu Aachen, ist von der königlich italienischen Akademie der Wissenschaften in Turin zum auswärtigen Mitglied der Akademie ernannt worden.

Hr. Privatdozent Dr. B. Schilling in Dresden wurde an der dortigen Technischen Hochschule zum a. o. Professor ernannt.

Hr. Regierungsbaumeister Dr. F. Eisner von der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin ist als Privatdozent der Mechanik (Strömungslehre für Bauingenieure) an der Technischen Hochschule Charlottenburg zugelassen worden.

Hr. Dr. H. Schmehl vom Preußischen Geodätischen Institut in Potsdam wurde als Privatdozent der Geodäsie an der Technischen Hochschule Charlottenburg zugelassen. 914

(Redaktionsschluß 3. August 1928.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.